微分形式による
特殊相対論

菅野 禮司 著

丸善株式会社

『微分形式による特殊相対論』正誤表 (1997.12)

ページ	行番号*	誤	正
22	+13	$f^\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$
26	+3, +6	疑似	擬似
29	+5	疑似	擬似
47	−11	(3.8) の第 1 列と第 1 行の要素	(3.8) で β^i を$-\beta^i$ とすると第 1 列と第 1 行の要素
〃	−6	$\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ を代入	$-\boldsymbol{\beta}_1$ と $-\boldsymbol{\beta}_2$ を代入
〃	−6, −4, −3	$L(\boldsymbol{\beta}_1), L(\boldsymbol{\beta}_2)$	$L(-\boldsymbol{\beta}_1), L(-\boldsymbol{\beta}_2)$
48	+2, +3	$L(\boldsymbol{\beta}_1), L(\boldsymbol{\beta}_2)$	$L(-\boldsymbol{\beta}_1), L(-\boldsymbol{\beta}_2)$
〃	+10, +13	− [式 (3.32b), (3.32c) のすべての −]	+
54	+9	$b^\nu{}_\mu\ a^\mu{}_\nu$	$b^\lambda{}_\mu\ a^\mu{}_\nu$
58	+1	共変擬テンソル	反変擬テンソル
95	−2	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{j}$

* + は上から数えた行番号, − は下から数えた行番号を示す.

はしがき

相対性理論の入門書や教科書は多いから，書くからにはそれなりの目的と特色のあるものでなければならないだろう．まず，できるだけ（外）微分形式を用いて相対性理論を記述したところが本書の特色である．その目的は物理学を学ぶ学生に微分形式に馴染んでもらうためである．微分形式は物理学では今後ますます広く一般的に活用されるようになり，近い将来に学部用の教科書にも使用されるようになると思われる．

微分形式は E. カルタンにより 1920 年頃に定式化され，力学理論にも適用された．微分形式は座標系を明示的に使用しなくともよいので，座標系に依存しない形式で力学を記述できる．それゆえ，変換理論などを扱うには非常に便利であるばかりでなく，物理学理論の解析に強力な武器となる．特に，解析力学や一般相対性理論には打って付けの数学形式である．微分形式の威力は一般相対性理論に適用した場合に最もよく発揮されるのだが，学部学生には難しく取り付きにくいであろうから，まず微分形式に馴染んでもらうために特殊相対性理論を取り上げた．微分形式の物理学への応用の入門書として，また相対性理論を学ぶ学生の役に立てば幸いである．

本書は，相対性理論に関する初等的知識があることを前提にしたが，入門書としても利用できるようにできるだけ基礎から解説した．しかし，相対性理論の基礎概念や基礎的理論に重点を置いたので，主にローレンツ変換の構造，変換群とその意味，および力学理論について解説し，運動学的現象や関係式は割愛した．特殊相対性理論は電磁気学に始まり，電磁気学に終わるといっても過

言ではない．それゆえ，荷電粒子と電磁場の系を微分形式を用いて表現することに多くのページを割いた．途中で，ある程度まとめてベクトル解析と微分形式について入門的解説をしたが，具体的に微分形式を相対性理論に適用するなかで解説するようにした．したがって，特殊相対性理論の従来の形式を微分形式で書き替えるというスタイルになっている．最後に，解析力学のラグランジュ形式とハミルトンの正準形式により，荷電粒子と電磁場の系を記述し，拘束条件の取り扱いとゲージ変換の関係を簡単に解説したところは，本書の特色の一つでもある．

まだ不備な点や説明不足なところがあると思う．それらについて読者のご批判をお願いしたい．

初稿を一通り書き上げた段階で，大阪市立大学理学研究科修士課程の院生東條崇君が全原稿を詳読して，原稿の誤りを訂正し，また読者の立場から建設的かつ有益な意見を述べてくれた．それにしたがって加筆修正した結果，かなり読みやすくなったと思う．また，編集部の奥田克己氏には本書の構想から原稿の内容まで含め，出版に至るまで種々お世話になった．改めてここに両氏に対し感謝の意を表します．

1996年9月

著　者　識

目　　次

序章　歴史的背景

光の波動説と光速度の有限性から，光を伝播するエーテルが全宇宙を満たしていると信じられるようになった．その結果，エーテルに対する相対運動の効果がいろいろ推測され，物理学の大きな課題となっていった．なかでも，光行差と物質運動に随伴するエーテルの問題が注目を浴びた．光行差は地球がエーテルに対して運動し，光速度が有限ならば，望遠鏡に入射する光の角度が斜めにずれるために恒星の見かけの方向がずれる現象である．エーテル仮説に基づくフレネルの光の波動論（1823）は，地球の公転による光行差を初め多くの成功を収めた．しかし，フレネルの理論は物質の運動に付随してエーテルの一部が物質と共に移動すると仮定し，しかもエーテルが物質に随伴する割合を示す随伴係数（$1-1/n^2$）が屈折率 n に依存するという点で矛盾を含んでいた．

その後，マクスウェルの電磁気理論からエーテルの振動としての電磁波が予言され（1867），ヘルツがそれを実験で確認した（1888）ことにより，光の電磁波説が確立された．それゆえ，当時の物理学者はエーテルの実在を信じていた．宇宙に充満する静止エーテルの存在は絶対空間に対応する．他方，光は横波であるから，横波のみ伝えるエーテルは剛体のように堅い性質を持つことになり，通常の物質とは全く異質なものとしなければならなかった．

ローレンツの電子論

マクスウェル理論の上に展開されたローレンツの電子論は，随伴係数に関するフレネルの光理論の矛盾を v/c の近似で一応解決した（v は物質の速度，c

は光速度)．電子はその平衡点付近で調和振動するとし，入射光線によって強制振動させられると光を発するが，その光と入射光との干渉で位相のずれを説明したのである．その他にも，ローレンツの電子論は，光学と電磁気現象に関していくつかの重要な成功を収めた．そしてローレンツ理論の意義はそればかりでなく，電磁気学に荷電粒子という実体を持ち込み，エーテルを媒介として荷電粒子と場によって電磁気学を構成したところにもあった．

エーテルに対する物質の相対運動の効果は v/c の1次までの近似では，静止エーテルによって矛盾なく説明できることが，光に関する諸々の現象について明らかにされていった．だが他方，エーテルの海のなかでの地球の自転，公転運動はエーテルに対する相対運動であるから，その運動効果が電磁気現象に現れるはずであった．このような状況のなかで，ローレンツは電磁気や光学現象における地球とエーテルとの相対運動の影響を検討した結果，v/c の1次近似の範囲内では，相対運動の効果は互いに打ち消すように働いて何の影響も現れないことを示した．それゆえ，地球の相対運動の効果を検証するには2次以上の効果を測定しなければならないわけである（後述）．

エーテルに対する地球の運動効果を，地上での光の伝播速度の測定により見い出そうとすると，光は同じ経路を往復させられるので，v/c の2次の精度が要求されることがすでに指摘されていた．地球の公転速度からして，$(v/c)^2 \sim 10^{-8}$ であるから，この精度で実験を行うことは極めて困難であった．

マイケルソン-モーレイの実験

地球の相対運動の効果を見い出すため，マイケルソンは光の干渉法を用いた精度の高い光速度計を発明した．これを用いて1881年にエーテルに対する地球の運動を測定したが，結果は否定的であった．しかし，この実験の精度が悪いことが指摘されたので，彼は装置を改良し，モーレイとの協同で精度を上げて再度実験を行った(1887)．だが，それでもやはり結果は否定的で相対運動効果は見られなかった．

彼らの実験は，光源に対し地球の進行方向とそれに垂直方向に光を往復させて，その時間差を測定する方法であった．光源からの光を半透明の鏡で二つに分けて，それぞれの行路を往復して帰ってきた光を干渉させて時間差を測定し

ようとするものであった．静止エーテルがあれば，片道の行路を L とすると

$$\text{地球の進行方向の往復時間：}\ t_1 = \frac{2L}{c[1-(v/c)^2]},$$

$$\text{垂直方向の往復時間：}\ t_2 = \frac{2L}{c\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$t_1 - t_2 \fallingdotseq \frac{L}{c}(v/c)^2$$

となる．最初の測定から実験台を 90° 回転させると，光干渉計の干渉縞が移動するはずであったが，その移動は見られなかった．

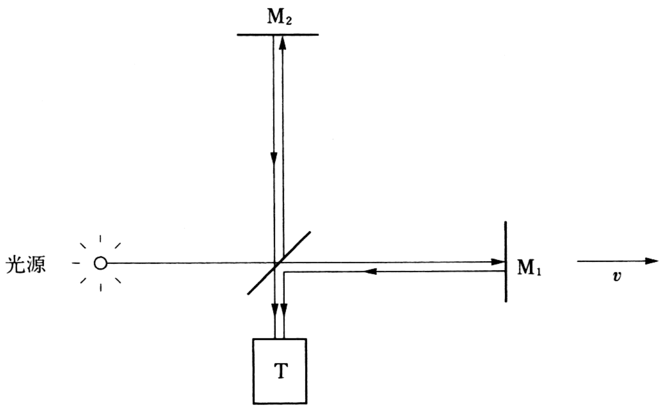


図1　マイケルソン-モーレイの実験

フィッツジェラルド-ローレンツ短縮仮説

エーテルの存在を仮定したまま，マイケルソン-モーレイの実験を説明しようと，種々の試みがなされたが，そのなかで注目されたのはフィッツジェラルド-ローレンツの短縮仮説であった．

すべての物体はエーテル中を運動すると，その進行方向に沿って $\sqrt{1-(v/c)^2}$ の割合で短縮する．

この短縮はエーテルの風圧で起こるのではない．なぜならば，短縮は物体の堅さに無関係であり，運動と直角方向には影響しないからである．この仮説によれば，マイケルソン-モーレイの実験では正確に $t_1 = t_2$ となり，干渉縞の移動

は起こらない．しかし，この短縮を検証しようとしても単純にはいかない．物差しを当てても物差しが一緒に短縮してしまうからである．この仮説は巧妙にできていて，簡単には襤褸がでないようになっていた．

マイケルソン-モーレイの実験を説明するだけなら，この仮説でよさそうに思える．だが，すでに知られている実験結果や理論と矛盾しないことは，その説の正しさを示すための必要条件であるが，それだけでは充分ではない．実験事実との矛盾を回避するだけで，他の方法によりその真偽の検証のしようがなければ，仮説は永久に仮説のままであって理論にはならない．その仮説から何ら新しい予言や積極的提言もできないのであれば科学理論としての価値はほとんどないのである．

そこでローレンツは彼の電子論でこの短縮仮説を説明しようとした．すべての物質は負の電荷をもつ電子と，正電荷をもつ粒子（原子核のことであるが，当時は原子構造は分かっていなかった）とからできていて，それら構成粒子を結合して固体を作る力は電磁気力であるとローレンツは考えた．彼はマクスウェル方程式を用いて，物質が運動するとき電気力が変化し，その物体が短縮するとした．しかも，その割合がちょうど彼らの仮説の短縮率と一致することを示した．

ローレンツ変換

電磁気及び光学的現象に対する運動効果の研究を進めていたローレンツは，v/c の近似によらず運動効果の現れない厳密な理論を築こうとした．彼の努力をその方向に向かわせた実験的事実は，レイリーとブレイスによる複屈折の実験と，トルートンとノーブルによるコンデンサーに働く偶力の実験であった．物体が進行方向に短縮すれば物体密度が方向により異なるから，複屈折を起こすはずであるが，結果は否定的であった (1902)．またローレンツ理論によると，充電したコンデンサーの極板を地球の運動方向に傾けて置くと，コンデンサーの電気はエーテルに対する電流とみられるので，極板を地球の運動方向に平行にしようとする偶力が働くはずであったが，その作用は見られなかった (1903)．

このような状況のもとで，エーテルに対する運動効果は精密実験によっても

見い出すことはできないであろうし，新しい実験事実が見い出される度に仮説を導入したり，修正したりするのでなく，近似によらない理論が可能なはずだとのポアンカレの指摘（1900）が，ローレンツに示唆を与えたと言われている．

ローレンツは，静止エーテルに固定された座標系（x, y, z, t）においてマクスウェル方程式が成り立つとし，それに対して速度 v で運動している座標系（x', y', z', t'）でのマクスウェル方程式が同型となるような座標変換式を求めた（1904）．

x 軸方向に相対運動している場合，両座標系間の関係は

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

であることを見い出した．

ところが，ローレンツはこの座標系（x', y', z', t'）は運動系で問題を解く便宜的に導入した数学的空間・時間であると考えて，実在の物理的空間・時間ではないとした．彼は物理的空間はあくまでもエーテルに固定したものとしたのである．すなわち，ローレンツはあくまでも静止エーテルに固定した座標系の時間・空間を物理的時空間と考えたわけである．しかし，ローレンツの功績を評価し，この変換式をローレンツ変換と名づけたのはポアンカレである．

電子質量は速さとともに増大

電子は自身の周囲の空間に電場・磁場を作るが，電磁場は単位体積当たり $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)/2$ のエネルギーをもつ．電子が加速されるとき，これらの電磁場を引きずって行かねばならないので，自己誘導作用と同じ抵抗が生ずるが，それが電子質量の由来であるとの説がアブラハムによって提唱されていた．アブラハムは電子は剛体としてその電磁質量を求め，電子質量が速度とともに増大することを示した（縦質量と横質量を区別）．ローレンツは電子は運動方向に短縮し楕円体になるとして，アブラハム理論を修正し，運動する電子質量は $m/\sqrt{1-(v/c)^2}$ となることを導いた．この式の形は，後にアインシュタインが導い

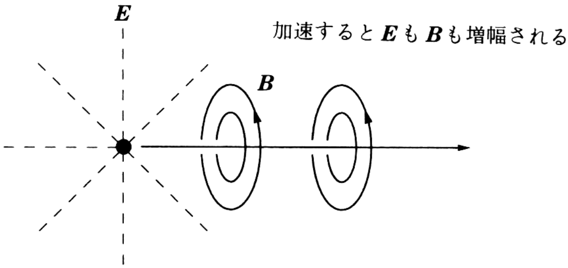


図 2　電子の電磁質量

たものと同形であるが，その意味には本質的差がある．

カオフマンはこの理論を検証する実験を行い (1905)，電子質量が速度とともに増すことを確認したが，実験精度が悪くローレンツの計算と一致しなかった．20 世紀になってアインシュタインの相対性理論が出てから，ブーヘラーが再実験を行いローレンツ-アインシュタインの質量式の正しさを実証した (1908)．

このようにローレンツはいろいろな点で，形式的にはほとんど相対性理論と同じ結果を導いていたが，エーテルの存在を信じていたために運動の相対性の考えに至らず，時間・空間の本質的吟味に進まなかった．したがって，形の上ではアインシュタインの相対性理論と同じでも，その本質的な意味内容は異なるのである．

以上のことからも分かるように，マイケルソン-モーレイの実験はそれのみで直ちにエーテルの存在を否定するものでも，またアインシュタインの光速度一定性を決定づけるものでもない．それらの可能性を示唆する重要な情報ではあるが，決定実験ではない．新たな仮説の提唱は単一の実験データのみでなされるのは稀であり，それに関連する物理理論と諸々の情報とを併せて総合的に判断してされるのである．

アインシュタインの運動の相対性

アインシュタインは電磁気理論が運動に対して相対性を欠いていることに疑問を抱いていたという．電磁誘導を説明するのに，導線を止めて磁石を動かし

たとき，磁束の変化により生ずる電場によって電流が流れる．逆に，導線が動き磁石が静止しているときは電場は生じないかわりに，導線内の電荷（電子）にローレンツ力 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ が作用し電流が生ずる．このように同じ現象を説明するのに，観測者により異なり，非対称があるのはおかしいと考えた．

力学理論ではすべての慣性系は同等であり，ニュートンの運動方程式はガリレイ変換で不変である．しかし，ローレンツが示したように，マクスウェル方程式はガリレイ変換に対し不変でなく，ガリレイの相対性を満たさない．

アインシュタインは大学生時代に読んだマッハの『力学の発展史』から影響を受けたという．マッハはニュートン力学の基本的概念や法則について徹底的に批判を加え，特に絶対時間，絶対空間は如何なる観察実験によっても捉えることのできない形而上学的概念であるといって，それを否定した．我々の時空概念は経験的に構成されたものであり，力学的に意味のあるのは相対時間・空間であると．マッハのこの影響を受けたアインシュタインはニュートン力学は最早絶対的に正しいものではなく，運動は相対的なものであると考えるようになった．

その結果，アインシュタインはエーテルの存在に固執せず，運動は相対的であるとの立場にたって，電気力学の非対称性の問題を解決しようとした．そのためにマクスウェル方程式がすべての慣性系で成立するように理論を作り直すべきだと考えた．そしてついに相対性理論に到達し，1905 年に論文「運動物体

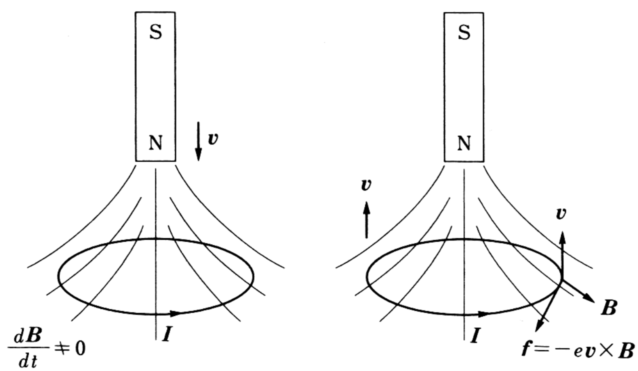


図 3　電磁誘導の説明の非対称性

の電気力学について」を発表した．

アインシュタインはローレンツとは逆に，エーテルに固定された絶対時間・空間を捨てて，運動の相対性を仮定した．その結果，すべての慣性系でマクスウェル方程式が成り立ち，それら時間・空間座標はすべて実在の時空であるとしたのである．そしてアインシュタインは2つの原理，“運動の相対性”と“光速度一定性”の上に特殊相対性理論を築いた．この原理は時間・空間概念に根本的変更をもたらし，それまでの物理概念や物理法則に関する理解を改めて検討し直す契機となった．

ローレンツがすでに示したように，マクスウェル方程式はローレンツ変換で不変であり，それゆえ，電場と磁束密度とはローレンツ変換で互いに移り変わる，すなわち電場と磁束密度は同一実体の成分のちがいであることが示された．この意味で，電磁場の本当の統一は特殊相対性理論によって完成されたといえる．したがって，特殊相対性理論はマクスウェル方程式に始まり，マクスウェル方程式に終わったと言っても過言ではないだろう．この‘終わり’は，言うまでもなく次の段階への発展の一歩でもある．

相対性理論の物理学上の意義は，力学，電磁気学の統一により新たな理論から新たな結果が得られたというだけでなく，常識的に当然と思われていた時間・空間概念すらも，現象に戻って改めて吟味し直すことの必要性を提示したことにある．経験科学であるはずの物理学理論にも，経験に基づかない形而上学的概念が秘かに導入されていることに気付かせてくれた．そうして科学理論といえども絶対的なものではなく，適応限界があることも明らかにしたのである．

1章　相対性理論における時間・空間

1-1　時間・空間とは

物体の運動を記述するには基準系とそれを表す時間・空間が必要である．物質がなければ空間概念は生まれず，物質の運動がなければ時間概念もない．したがって，時間・空間は物質の運動の2つの側面であり，客観的存在である．しかし，時間・空間の表現形式は一義的ではなく，そこに人為的な要素が入りうる．

ニュートンのような絶対時間・空間を否定する限り，物理的時間・空間の性質はアプリオリには定まらず，経験をもとに築かれる理論形式の枠内で，理論体系と同時に決まる仕組みになっている．物理的時間・空間の性質は幾何学的構造により決まるのであるが，幾何学的性質は局所的構造を与える計量（メトリック）と大域的構造に関する位相（トポロジー）とにより定まる．計量は時空間の歪み（曲率，捻れなど）や尺度の構造に関するもので，位相は時間・空間の次元数，有限性，連結性などに関するものである．特殊相対論の時間・空間は，後に詳しく述べるように，基準系を1つ決めれば，無限かつ一様等方な擬ユークリッド的計量（時間と空間は逆符号）であり，位相は3次元単連結空間と1次元時間からなる4次元ミンコフスキー空間（ローレンツ空間）である．

時間・空間の計量，特に尺度をどのように決めるべきか，その一般的手続きをまず考察してみよう．それには2つの厄介な問題が含まれているのである．

まず，物質の運動から時間・空間を取り出し，その時間・空間概念により運動を記述しようとすると，長さ，時間及び速さの関係は循環論に陥ることが予想されるであろう．事実，速さ v は dx/dt で定義されるが，長さ x と時間 t の尺度が決められていなければ v は決まらない．物差しを決め x の単位を与えたとしても，時間の尺度を与えるには運動にたよらねばならない．通常，時間を決めるには周期運動を用いるが，そのとき運動速度を知る必要がある．ところが，速度を測るには時間・空間尺度が決まっていなければならない．そのための周期運動として地球の自転を選ぶにせよ，振り子の振動，あるいは原子振動を選ぶにせよ，その周期運動が一定の周期で（等速）運動をしていることを前提にして時間尺度を決めている．しかし，その振動周期が常に一定であることは何によって保証されているのだろうか．昔は地球の自転は等速回転であると信じていた．だがそもそも，周期が一定であるかどうかという問は1つの運動のみ見たのでは意味がなく，他の運動と比較してこそ意味を持つ．したがって，地球の自転，あるいは原子振動の周期を一定と仮定して，時間を決めるのである．要するに，長さ，時間，速さの関係は，3要素のうちの2つが決まればそれによって残る1つは定義されるようになっている．このように，**空間の長さ，時間，速さはお互いに他に依存して決まる循環論的構造**となっているので，どれかを先に仮定しなければならない訳である．特殊相対論の場合は，まず時間・空間はそれぞれユークリッド的一様と仮定し，さらに速さの尺度を“光速度一定の原理”によって先に仮定し，時間・空間尺度を定める仕組みになっている．こうした仮定の上に築かれた理論から演繹される結論を実験により検証し，自然現象をうまく説明できれば，最初の仮定と理論が正しいということになる．したがって，**時間・空間の性質はアプリオリに定まっているのでなく，物理理論の体系と同時に，その枠内で決まる仕組み**になっている．ここで大切なことは，時間・空間，速度に関する仮定や原理を適切に選択すれば矛盾のない物理理論が存在するということである．

もう1つの問題は，隔たった2地点での距離と時間を比較する操作に関するものである．これも面倒な問題を含んでいる．長さの基準尺度を与える1mの物差し（メートル原器）を作って，それで全空間に亘り座標に目盛りを付ければすむかというと，そう単純にはいかない．物差しを移動することにより，

物差しの長さが変り目盛りが狂うかも知れない．温度差や圧力差などによる狂いは補正できるが，未知の原因で物差しの長さが変われば補正の仕様がないからである．

離れた2地点での時間を測る時計についても同じことがいえる．また，上述のように，過去（昨日）と現在（今日）の1秒が同じ時間間隔であるか否かは仮定なしでは比較できない．それゆえ，とにかく種々の運動を比較して，一番規則的周期運動であると判断されるものを時間の基準に選び，それによって時間を測り比較するしか方法はないのである．

したがって，離れた2物体の長さや時計の時間を，離れたままの状態で比較するには信号によらざるをえない．その信号に光を用いるのが一番よい．なぜならば，光は真空中でもどこでも伝わるというばかりでなく，特殊相対論においては光速度一定性という普遍的仮定をするからである．

1-2　相対論の基礎原理

アインシュタインの相対性理論は次の2つの原理の上に築かれている．

(1) 運動の相対性の原理：全ての慣性系は物理法則に関して同等である，

(2) 光速度一定性の原理：全ての慣性系において真空中の光速度は一定である．

光速度一定性の原理は光源の運動状態に関係なく真空中の光速度は一定である，とも表される．

これら2原理について少し物理的考察をしておこう．

a. 運動の相対性について

絶対時間・空間を捨てれば，絶対位置や絶対運動は存在しないから，全ての運動は相対的であり，したがって全ての座標系は物理的に同等であるといえそうである．しかし，一挙に一般相対論までは飛躍できず，慣性系を基準に選ばざるをえなかった．その理由は，ニュートン力学において，まず慣性法則を基礎に力を定義し，慣性系の上で運動法則を築いたように，特殊相対論もその枠から出ることはまだできなかった．

絶対時間・空間がなければ，何らかの形式で相対性原理が満たされるべきである．さもなければ，自然の斉一性や自然法則の客観性が疑問になる．特定の座標系（例えば，地球中心）でしか成立しない物理法則は普遍的でなく，特定の観測者にしか認められない主観的なものである．少なくとも全ての慣性系で同一の物理法則が成立すれば，その法則はそれだけ広い普遍性と客観性を有することになる．したがって，できるだけ任意の座標系で成立する法則の方が望ましいわけである．だが，特殊相対論は慣性系という**人為的要素**を含むものに頼っている点でまだ限界がある．自然認識の発展過程で，慣性系によらない任意の座標系で成立する物理法則を築くまでに，人間の思考形式は一度この段階を経なければならなかったのである．

では慣性系はいかにして選定するか．もはや絶対基準系に頼るわけにはいかない．1つにはマッハ原理によって，宇宙全体の質量中心に対して等速運動している座標系を慣性系とすれば一応原理的には決定しうる．しかし，宇宙の物質分布は変化するし，宇宙が有限で質量中心が意味あるものかどうかも分からない．したがって，地球上において，もっと簡単に慣性系を定義する手段が欲しい．その方法は実は“光速度一定性原理”と関連しているのである．

b.　光速度一定性について

全ての慣性系で光速度が一定であるという仮定は，物理的常識からかけ離れている．アインシュタインがこの原理を思いついたのは，マイケルソン-モーレイの実験からではないらしい．この実験は“光速度一定”と矛盾はしないが，積極的にそれを示唆するものではない．事実，序章で述べたように，ローレンツはマイケルソン-モーレイの実験を別の方法で説明した．

光速度一定性の原理は運動の相対性と電磁気学のマクスウェル方程式を認める限り論理的に必然の帰結である．なぜならば，全ての慣性系が物理的に同等であるならば，マクスウェル方程式は全ての慣性系で成立しなければならない，すなわちマクスウェル方程式は全ての慣性系で同型となる．ところが，マクスウェル方程式からは電磁波の波動方程式

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0,$$

が導かれ，しかもマクスウェルが示したように，この方程式から電磁波の速度は光速度 c であることが導かれる．したがって，全ての慣性系で光速度は一定値 c でなければならないのである．

では次に慣性系をどう定義するかの問題に移ろう．1つの基準慣性系が決まればそれに対して等速度運動をしている全ての座標系は慣性系であることは，ニュートン力学と同じである．相対論の理論構造は，**光速度の値が $c=3\times10^8$ m/s であるような座標系を慣性系と定義**しているのである．

しかし前述（1-1節）のように，時間，空間，速度の尺度の決定は循環論であった．その循環論から脱するために時間・空間の一様性を前提とし，**まず速度の尺度を光速度 c と決め**，それによって時間・空間尺度を定めるという理論構造になっている．後にローレンツ変換を用いてそれを定量的に示すように，この光速度一定性の仮定の上で各慣性系ごとの時間・空間尺度が導かれるのである．

こうしてみると，光速度一定性の原理は慣性系を決定する役と，時間・空間尺度を与える役と，二役を演じているわけである．すると，まず光速度 c により慣性系を定め，また光速度 c から慣性系の時間・空間尺度を決め，こうして決めた時間・空間尺度によってあらためて光速度の値 c を測定することをしているわけで，結局ここにも循環論がみられる．

このように観察・実験に基づく経験科学でも，経験から直接得られる概念のみを用いて理論を築くことはできず，どこかに仮定や未定義概念が入らざるをえない構造になっている．

1-3　光速度一定性の原理からの帰結

すべての慣性系において光速度が一定値 c であると仮定することは，必然的に慣性系ごとに別々の時間・空間尺度を用いることになる．なぜならば，同一

の時間・空間尺度ならば，1つの慣性系で光速度が c のとき，それに対して相対速度 v で運動する慣性系ではその光速度は $c\pm v$ となるからである．それゆえ，慣性系間の時間・空間座標を結ぶ変換則を求めねばならない．そのためにはまず，同期化（時計合わせ）の操作と同時性を定義せねばならない．

物理的概念や物理量の定義が客観的で普遍性を有するための必要条件を，この時計の同期化を例に明らかにしておこう．この議論は物理学の一般的論理としても重要であるが，特に相対論では吟味すべき問題を含んでいるので，少し説明がくどくなるが詳述しておく．

a.　時間の同期化

隔たった2地点の同期化，すなわち2地点AとBにある時計合わせの方法は次のようにすればよい．真空中の光速度は光源の速度によらず一定なので同期化には光信号を使う．言うまでもなく，ここで問題にしている同期化の操作は理想化された原理的方法である．

いまA点にある時計の時刻が t_A の瞬間に光信号をAからBに向けて送り，その信号がB点に達した時刻がBの時計で T_B であったとしよう．Aからの光はBに置かれた鏡により直ちに反射されてAに送り返され，Aの時計で時刻 $t_{A'}$ にA点に到達したとする（Aの時刻 t とBの時刻 T とを区別していることに注意）．この場合，

$$t_A+t_{A'}=2T_B \qquad (1.1\,\mathrm{a})$$

ならば，$t_B=T_B$ として，AとBの時計は合っているときめる．この同期化の定義はAとBが相対的に静止していれば明らかに妥当である．なぜならば，逆にBがこの操作を行い，Bから時刻 T_B に光信号をAに送りAの時刻 $t_{A''}$ で反射された光をBの時計の $T_{B'}$ にBが受けたとすると，

$$T_B+T_{B'}=2t_{A''}=2T_{A''} \qquad (1.1\,\mathrm{b})$$

とすれば，AとBのいずれの立場から見ても両者の時計は合っていると同意できて，$t=T$ としうるからである．

こうして，同一慣性系に固定された2つの時計の同期化がなされ，さらにこ

の手続きでBとCも同期化されるから，次々にすべての時計を合わせることができる．この方法で，AとBが，そしてBとCが同期化されれば，AとCも合っている，すなわち同期化は推移律を満たす．こうしてすべて整合的に同期化できる．

ところがAとBが互いに相対運動をしているときどうであろうか．(1.1a) によって決めた同期化はA静止系，つまりAを基準にして決めたものであることに注意しよう．なぜならば，Aの静止系で見ると，Aに対してBが運動している場合でも，Aから送られたBへの光の走行距離は，帰りのBからAへの走行距離と同じであるから，Aは $t_B = T_B$ とするのが妥当と思うだろう．しかし，この操作をBの立場でみると，AからBへの行きの走行行路とBからAへの帰りの走行行路は異なる（BがAに近づく場合，帰りの行路の方が短い）．したがって，Aが決めた t_B は T_B と等しくない（$T_B - t_A > t_{A'} - T_B$）と主張するだろう．それゆえ，この同期化に関してAとBの意見は一致しない．

次に，Bから光を送った場合の同期化（1.1b）はB静止系でBの時計を基準にしたものであることがわかる．それゆえ，AはBの同期化に同意しないであろう．このように，互いに相対運動している時計の同期化は基準系により異なる．この事情が他の現象（例えば物体の長さ）にも影響し面倒な状況を引き起こすのである．

その事情をもう少し詳しく見るために，上の同期化で（1.1a）と（1.1b）の時刻 T_B を同じとし，Aからの信号がBに達した時刻 T_B にBから光信号をAに送るとする．すると，光速度一定性によりBから送られた光は，Aから送られBで反射された光と同時にAに達するから，Aの時計が $t_{A'}$ のときAに達する．その光がAの鏡で反射されてBに戻った時刻が $T_{B'}$ であったとすると，Bの立場では

$$T_B + T_{B'} = 2t_{A'} \tag{1.2}$$

となる．すると，(1.1a) と (1.2) から

$$T_{B'} - T_B = t_{A'} - t_A \tag{1.3}$$

を得る．この式はAから出た光信号と，Bから出た光信号の往復時間がそれぞれの系で一致することを示す．このことは，どちらの系から観測しても光の行路は往復とも同じ（T_B の位置から t_A の位置まで）となるからである．すな

わち，少なくとも，この同時刻の定義では，それぞれの時計で計った光の往復時間は両者で一致するようになる．しかし，これを第3の系Cから見ると，最初Aから送られた光の走行距離は次のBから送られた光の走行距離より長い．これは矛盾しているようにみえる．それゆえ互いに相対運動している時計の同期化はそれぞれの立場で異なっていて整合的ではない．



図 1.1　光信号による時計の同期化

この結果は，光速度は光源の運動によらないことと，運動の相対性により，当然予想されることである．

1つの慣性系で，この方法によりある瞬間に離れた地点での時計の同期化ができればそれによってその慣性系で物理現象を記述する時間系が整ったことになる．こうして一旦同期化された後は，それぞれの時計の進行速度は違ってもよい．実際に，光速度一定性の原理に基づく相対性理論では互いに運動している時計の刻みは異なる．

b.　物理量の客観的定義の必要条件

物理量の定義が客観的である（少なくとも全ての観測者が同意できる）ためには，よく知られているように，次に示す論理学の同値関係を与える3つの基本律を満たしていなければならない．

物理量 a, b, c に対して

反射律：$a \sim a$,

対称律：$a \sim b$ ならば $b \sim a$,

推移律：$a \sim b$, $b \sim c$ ならば $a \sim c$.

物理量の数値が対象の場合は，同値の記号～は等号 ＝ となる．

この反射律はその物理量が存在し一義的に同定できるための条件である．対

称律は，同値ということがAから見てもBから見ても一致（aに対するbの関係が，bに対するaの関係と一致）するための条件，すなわち同値の定義が2人の間で同意できる条件である．上記の同期化の手続きで，相対運動がない場合の（1.1 a）と（1.1 b）とが整合することがこれに相当する．推移律は3人以上の間で同値の定義が一致同意できることを保証する．と同時に，推移律はCの値cはAを基準にしても，Bを基準にしても同一になること，つまり物理量の定義の基準として何を選んでもよいということを示している．もし推移律が成立しなければ，何を基準にして決めた値かをいちいち示さなければならない（例えば，物体の質量の値は鉄の分銅を用いて決めた値か，銅を用いて決めた値かを断らなくとも，単に何gと言うだけでよい．また温度も測定に用いた温度計の種類によらず，ただ何度と言えばすむのはこれらの条件が満たされているからである）．時計の同期化の例では，Aを基準にして決めた同期化か，Bを基準にしたものかを指定しなければならない．

同値関係ばかりでなく，物理量の大小関係についても，その順序関係が客観的定義であるためには

反射律：$a \geq a$,

反対称律：$a \geq b$, $b \geq a$ ならば $a = b$,

推移律：$a \geq b$, $b \geq c$ ならば $a \geq c$,

が要請される．もし，この関係が満たされなければ，大小関係（順序付け）を決めることは不可能である．

同値，順序付けに関するこれらの諸条件は自明ではなく，常に成り立つとは限らないことに留意すべきである．たとえば，円周上の3点が左回りにa, b, cの順で並んでいるとき，右 ＞ 左と定義すれば$a > b$, $b > c$, $c > a$となり$a > c$

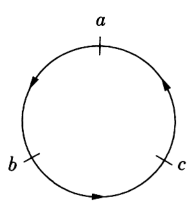


図 1.2　順序関係

とはならない．このような場合には順序関係は定義できない．物理量の定義の場合に，同一尺度を用いるならば，対称律と推移律は通常成立するが，後に見るように，相対論においては同時性や時間・空間尺度が座標系の速度に依存するので，必ずしも無条件では成り立たない．ただしその場合でも，物理量については，ローレンツ変換によってその量を**同一基準系に変換して比較すれば同値関係と順序関係が成立する**ことは保証されている．したがって，時間・空間尺度の定義をはじめ，諸々の物理量は客観性を有するように理論が構成されているわけである．

c.　同時性

光速度一定性の原理のために，互いに相対運動をしている2つの座標系での“同時刻”が必ずしも一致しない．慣性系Oに対し x 軸方向に相対速度 v で運動している慣性系O′とで同時刻を決める方法を考察しよう．

O′系の2地点A, Bの中央Cにある光源からA，Bに向けて同時に光を送ると，O′系の観測者はCからの光は同時にAとBに達したという．この同じ現象をO系の観測者が見ると，光はO系に対しても左右に同じ速度 c で伝わる．すると，光がAに達するまでにA点とB点は速度 v で右に移動するから，光はA点に先に到達し，B点には遅れて到達する．それゆえ，O′系での同時刻はO系では同時刻ではない，すなわち，同時性は一致しない．これと同じ事情は時計の同期化にもあることはすでに述べた．

O′系の同時刻がO系でどれだけの時間差になるかを求めてみよう．2点A, BのO系で計った距離を $2L$ とし，Cから出た光がAとBに到達した時のO系の時刻をそれぞれ t_A, t_B とする．Cからの光がA点に達するまでに，vt_A だ

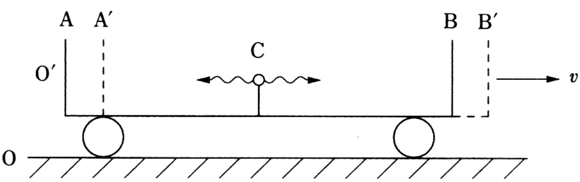


図1.3　同時性は慣性系ごとに異なる．

け A 点は右に移動するから，

$$t_A = \frac{L - vt_A}{c}.$$

他方，B 点も光がそこに達するまでに右に vt_B だけ移動するので

$$t_B = \frac{L + vt_B}{c}.$$

これら 2 式から t_A，t_B を求め，差をとると

$$t_B - t_A = \frac{2Lv}{c^2[1-(v/c)^2]}$$

を得る．相対速度 v が 0，あるいは 2 点 A と B が離れておらず同一点ならば O 系と O′ 系で同時性が一致することは上式から明らかである．

運動の相対性により，逆に O 系の同時刻は O′ 系の同時刻とは限らない．このように，同時性の定義に関しては対称律は成立しないから，同時性の概念は客観的，普遍的ではないことになる．

同時性が慣性系ごとに異なるために，長さの尺度も慣性系ごとに異なることになる．なぜならば，運動物体の長さは両端の位置を同時に測らねばならないからである．その定量的考察はローレンツ変換を導いてから行う．

2章　ローレンツ変換

2-1　ローレンツ変換の導出

光速度一定性の原理からの帰結でもう1つ重要なことは慣性系間の時間・空間座標の関係は，ガリレイ変換に代り，ローレンツ変換となるということである．

これから使う座標系の記号をここで導入しておこう．

3次元空間の座標：x^1, x^2, x^3,

時間変数は t の代りに，長さの次元をもつ量：$x^0=ct$,

4次元時間・空間座標をまとめて：x^μ（$\mu=0,1,2,3$）で表し，

特に3次元空間座標は x^i（$i=1,2,3$）と記す．

4次元ミンコフスキー空間（ローレンツ空間）の計量を

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$

と選ぶ．この計量は，3次元空間はユークリッド空間，時間は一様であることを前提としたものである．

慣性系Oで時間 $\varDelta x^0$ の間に光が空間の2点 P_1 から P_2 まで $\varDelta x^i$ だけ進んだとすると

$$\eta_{\mu\nu}\varDelta x^\mu \varDelta x^\nu = (\varDelta x^0)^2 - \sum(\varDelta x^i)^2 = 0$$

である．今後，上付き及び下付きの同じ添字の積については和をとる約束に従い，和の記号 $\sum$ を省略する．

この光が O′ 系では $\varDelta x'^0$ の間に$\varDelta x'^i$ 進んだとすると，光速度一定性の原理に

より

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu\nu}\Delta x'^\mu \Delta x'^\nu = 0 \qquad (2.1\,\mathrm{a})$$

である．

光の場合は Δs は 0 であるが，光から離れて一般に，この式で与えられる Δs を 4 次元ミンコフスキー空間の距離，世界距離（間隔）と呼ぶ．(2.1 a) から得られる

$$(\Delta s)^2 = \text{一定} \qquad (2.1\,\mathrm{b})$$

を満たす座標変換が，言うまでもなくローレンツ変換である．すなわち，ローレンツ変換は 4 次元距離を不変にする変換として定義される．この定義は「光速度一定性」からの帰結である．それが一次変換であることは，一様な時間とユークリッド的空間の性質から必然である．その理由を以下に示す．

いま，座標変換を

$$x'^\mu = f^\mu(x) \equiv f^\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

としよう．時間・空間内の 2 点 $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}{}^\mu)$ と $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}{}^\mu)$ をとると，2 点間距離 AB の x^1 成分はこの変換により

$$x_\mathrm{B}{}'^1 - x_\mathrm{A}{}'^1 = f^1(x_\mathrm{B}) - f^1(x_\mathrm{A})$$

となる．一様ユークリッド的時間・空間においては 2 点間の距離は，原点の位置をどこにとっても変わらないから，原点を x^1 軸上で a だけ移動させると

$$f^1(x_\mathrm{B}{}^1 + a, x_\mathrm{B}{}^2, \cdots) - f^1(x_\mathrm{A}{}^1 + a, x_\mathrm{A}{}^2, \cdots) = f^1(x_\mathrm{B}{}^1, x_\mathrm{B}{}^2, \cdots) - f^1(x_\mathrm{A}{}^1, x_\mathrm{A}{}^2, \cdots).$$

この左辺を a について展開すると

$$\left\{\frac{\partial f^1(x_\mathrm{B})}{\partial x_\mathrm{B}{}^1} - \frac{\partial f^1(x_\mathrm{A})}{\partial x_\mathrm{A}{}^1}\right\} a + (a\ \text{の 2 次以上}) = 0$$

を得る．a は任意にとりうるから，a の係数が消えなければならない．

$$\therefore \quad \frac{\partial f^1(x_\mathrm{B})}{\partial x_\mathrm{B}{}^1} = \frac{\partial f^1(x_\mathrm{A})}{\partial x_\mathrm{A}{}^1}.$$

この結果は，$\partial f^1/\partial x^1$ が x^1 に依存しない，すなわち，f は x^1 の 1 次式であることを示す．他の x^μ についても同様である．よって，x^μ の変換は 1 次変換である．

世界距離の 2 乗 $(\Delta s)^2$ の値はローレンツ変換の下で不変であるが，Δx^0 と Δx^i の大きさの関係で正負，および 0 の値をとりうる．そこで，それぞれの場

合，次のように呼んでいる．

$(\Delta s)^2 > 0$：時間的距離（光が達しうる時間・空間の関係）

$= 0$：光的距離（光がちょうど到達する時間・空間の関係）

< 0：空間的距離（光が達しえない時間・空間の関係）

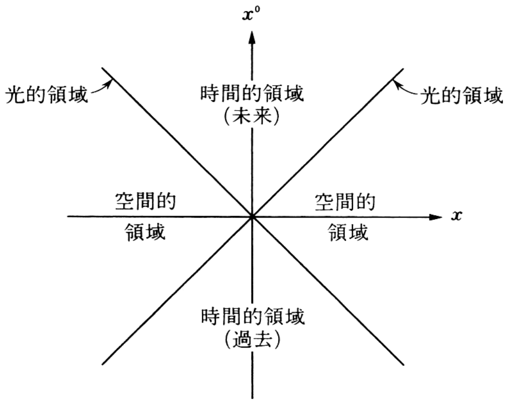


図 2.1　ローレンツ変換で区切られるミンコフスキー空間の領域

ローレンツ変換は Δs を不変に保つのであるから，これらの時間的距離，光的距離，空間的距離の関係にある 3 領域（図 2.1 参照）は分離され，ローレンツ変換によって互いに移り変ることは絶対にない．

ローレンツ変換の一般形を求める前に，まず 2 つの慣性系の座標軸が互いに平行で，相対速度 v は x^1 軸に平行である場合を導く．

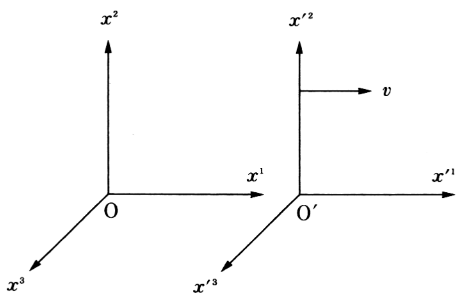


図 2.2　x^1 軸方向のローレンツ変換

慣性系Oと O′ の座標の関係のうち，まず運動方向と直角の x^2，x^3 軸の変換を決めよう．いま O 系で見て x^2 軸に垂直な平面をとると，その平面は O′ 系で見てもやはり x'^2 軸に垂直である．したがって，

$$\varDelta x'^2 = a(v)\varDelta x^2 \tag{2.2}$$

とおける*)．ここに a は v のみに依存する係数である．次に座標軸の向きを反転 ($x^i \to -x^i$, $x'^i \to -x'^i$) させると，v も符号を変え $-v$ となるが，(2.2) の形は保たれるので，$a(v)=a(-v)$ を得る．よって a は偶関数である．

ここで O 系と O′ 系の役割を入れ換えると，v が $-v$ となるだけで同様の式

$$\varDelta x^2 = a(-v)\varDelta x'^2 \tag{2.3}$$

が成り立つ．(2.2) と (2.3) とから，$a^2=1$，よって，$a=\pm 1$ となる．O と O′ 系の座標軸を同じ向きにとると，$v=0$ で $\varDelta x^2=\varDelta x'^2$ であるべきだから，$a=1$ である．x^3 軸についても全く同様である．結局

$$\varDelta x'^2 = \varDelta x^2,\quad \varDelta x'^3 = \varDelta x^3 \tag{2.4}$$

となる．

次に x^1 軸と時間 x^0 軸の変換を求める．(2.1) に (2.4) を用いると，x^0 と x^1 成分のみの関係式となるので，一般的な1次変換式は次のように書ける．

$$\left.\begin{aligned}\varDelta x'^0 &= \alpha\varDelta x^0+\beta\varDelta x^1,\\ \varDelta x'^1 &= \gamma\varDelta x^0+\delta\varDelta x^1.\end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

いま O′ 系の1点に着目すると，O′ 系では静止，O 系では速度 v で運動するから，(2.5) の第2式で $\varDelta x'^1=0$ と置いて，$\varDelta x^1=(v/c)\varDelta x^0$ を考慮すると $\gamma/\delta = -v/c$ を得る．よって，

$$\varDelta x'^1 = \delta\left(-\frac{v}{c}\varDelta x^0+\varDelta x^1\right). \tag{2.6 a}$$

今度は逆に，O 系の一点に着目してその運動を O′ 系で観測すると，速度は $-v$ であるから，(2.5) で $\varDelta x^1=0$ と置いて，$\varDelta x'^1=-(v/c)\varDelta x'^0$ を用いると，$\gamma/\alpha= -v/c$ を得る．よって，$\alpha=\delta$ となり，

$$\varDelta x'^0 = \delta\varDelta x^0+\beta\varDelta x^1 \tag{2.6 b}$$

---

*) 通常ローレンツ変換は座標変換として x^μ（原点から x^μ に向かうベクトル）に対する変換則で表されるが，ここではミンコフスキー空間の2点間を結ぶ4次元ベクトル $\varDelta x^\mu$ の変換則として書くことにする．こうすると座標原点のとり方に依存しないからである．

を得る．(2.6a, b) を (2.1) に代入して，両辺を比較すれば，

$$\alpha=\delta=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$
$$\beta=\frac{-\delta v}{c}.$$

以上の結果をまとめると，次のローレンツ変換が得られる．ただし，以後記号を改めて

$$\beta=\frac{v}{c},\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.7}$$

とおく．すると

$$\begin{aligned}\Delta x'^0&=\lambda(\Delta x^0-\beta\Delta x^1),\\ \Delta x'^1&=\lambda(-\beta\Delta x^0+\Delta x^1),\\ \Delta x'^2&=\Delta x^2,\quad \Delta x'^3=\Delta x^3.\end{aligned} \tag{2.8}$$

このローレンツ変換式は，言うまでもなくO系からO′系への変換である．この式を逆に解けば，O′系からO系への逆変換式が得られる．

$$\begin{aligned}\Delta x^0&=\lambda(\Delta x'^0+\beta\Delta x'^1),\\ \Delta x^1&=\lambda(\beta\Delta x'^0+\Delta x'^1),\\ \Delta x^2&=\Delta x'^2,\quad \Delta x^3=\Delta x'^3.\end{aligned} \tag{2.9}$$

この結果は，運動の相対性から当然要請されるもので，(2.8) においてO系とO′系の座標変数を入れ替え，β を $-\beta$ とした表式である*)．

ローレンツ変換では空間と時間間隔は独立ではなく，互いに関連して変換される．その関連の仕方は慣性系間の相対速度に依存する．相対速度が充分遅く $\beta=v/c\to 0$ のとき，$\lambda\to 1$ となり，ローレンツ変換はガリレイ変換に移行し，時間と空間成分は独立分離する．

ローレンツ変換は，すべての慣性系が物理的に同等であることを要請する運動の相対性原理をもとに導かれたものであるから，物理法則はこのローレンツ変換の下で不変でなければならない．実際，相対論的力学や電磁気学はローレ

---

*) ローレンツ変換から導かれる時間・空間尺度は慣性系ごとに異なるから，速度の尺度もO系とO′系で同じである必然性はない．しかし，(2.6a, b) では相対速度 v の値はどちらの系から見ても同じとしている．これはかなり強い要請である．

ンツ変換の下で不変な形式となる．先に述べたように，この不変性は物理法則の客観性を保証するものである．

2-2　疑似ローレンツ変換

ローレンツ変換の重要な性質は，それが変換群をつくるということである．その理由を説明しよう．まず第一に，光速度一定性の原理を用いなくとも，次の要請のみで (2.8) と同形の変換則，疑似ローレンツ変換が導かれるということである．このことは，平坦な4次元時空間の変換則としてローレンツ変換はかなり一般的なものであることを示している．

仮定 1. 時間・空間の一様等方性（ユークリッド性），

2. 運動の相対性，

3. 変換が群をつくる．

以上の仮定から，前節と同じく，x^1 軸方向に相対速度 v で運動している場合の座標変換の形を求めてみよう．仮定1及び2から，前節で行った手続きにより，2つの慣性系間の座標変換は (2.4) と (2.6) で表される．x^0 と x^1 成分について，パラメータの文字を少し変えて改めて書き下すと

$$\begin{aligned} \Delta x'^0 &= \alpha(\beta)\Delta x^0 - \delta(\beta)\Delta x^1, \\ \Delta x'^1 &= \lambda(\beta)(-\beta\Delta x^0 + \Delta x^1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで $\beta = v/c$ である．c が現れるのは時間変数として $x^0 = ct$ を用いているためである．α, δ, λ はすべて無次元量となるように，速度パラメータを v の代りに β を用いているだけで，光速度一定性とは関係ない．

空間の等方性ゆえに，ここで x^1 と x'^1 の向きを反転しても同形の式が成り立つべきであるから，上式に対応して

$$\begin{aligned} \Delta x'^0 &= \alpha(-\beta)\Delta x^0 + \delta(-\beta)\Delta x^1, \\ -\Delta x'^1 &= \lambda(-\beta)(\beta\Delta x^0 - \Delta x^1) \end{aligned}$$

を得る．これと元の式 (2.10) を比較すると，α と λ は偶関数，δ は奇関数であることがわかる．そこで

$$\delta(\beta) = \beta\varepsilon(\beta)\lambda(\beta)$$

とおく．ここで ε は未定の β の偶関数である．

次に，運動の相対性により，O′ 系から O 系を見れば，(2. 10) の逆変換として

$$\begin{aligned}\Delta x^0 &= \alpha(-\beta)\Delta x'^0 - \delta(-\beta)\Delta x'^1 \\ &= \alpha(\beta)\Delta x'^0 + \beta\varepsilon(\beta)\lambda(\beta)\Delta x'^1, \\ \Delta x^1 &= \lambda(-\beta)(\beta\Delta x'^0 + \Delta x'^1) \\ &= \lambda(\beta)(\beta\Delta x'^0 + \Delta x'^1)\end{aligned}$$

が成り立つ．この 2 式を $\Delta x'^0$ と $\Delta x'^1$ について解くと次式を得る．

$$\begin{aligned}\Delta x'^0 &= \frac{\Delta x^0 - \beta\varepsilon\Delta x^1}{\alpha - \beta^2\varepsilon\lambda}, \\ \Delta x'^1 &= \frac{-\beta\lambda\Delta x^0 + \alpha\Delta x^1}{\lambda(\alpha - \beta^2\varepsilon\lambda)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

この結果と (2. 10) を比較して，α，λ の関係を求めると

$$\alpha = \lambda, \quad \lambda^2 = (1 - \varepsilon\beta^2)^{-1}.$$

したがって，

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon\beta^2}} \tag{2.12}$$

を得る．以上の結果をまとめると，ε を未定関数として，変換則は

$$\begin{aligned}\Delta x'^0 &= \lambda(\beta)[\Delta x^0 - \beta\varepsilon(\beta)\Delta x^1], \\ \Delta x'^1 &= \lambda(\beta)(-\beta\Delta x^0 + \Delta x^1), \\ \Delta x'^2 &= \Delta x^2, \quad \Delta x'^3 = \Delta x^3.\end{aligned} \tag{2.13}$$

となる．

最後に，変換則 (2. 13) が群をつくるという，仮定 3 を用いれば，未定関数 ε をさらに制限できる．

ある集合 G が群をつくる条件は次の通りである．

群の定義：G の元 a, b, c に対して結合 (これを積という) $a \cdot b$ が定義され，それが元 c に等しいとき $a \cdot b = c$ と表す．結合 $a \cdot b$ から c が一義的に決まり，かつ

1) 積に関する結合則 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ を満たす．

2) すべての元 a に対して $a \cdot e = e \cdot a = a$ なる単位元 e が存在する．

3) 任意の元 a に対して $a \cdot x = e$ を満たす逆元 x が存在する．

これらの条件を満たす集合 G は群をつくる．

変換群の場合，単位元にあたるものは恒等変換，逆元にあたるのは逆変換，

そして2元の積は2つの変換の積である．いま問題にしている変換では，$\beta=0$ のとき O 系と O′ 系とは一致するから，この変換は明らかに恒等変換である．また β を $-\beta$ とすれば互いに逆変換であることはすでに見た通りである．次に2つの変換を O 系から O′ 系へ，さらに O′ 系から O″ 系へ引き続く変換を行ったものが，群の定義によって，1回の同種の変換で移れることを利用しよう．O′ 系に対する O″ 系の速度を $c\beta'$ とすると（2.13）により

$$\begin{aligned} \Delta x''^0 &= \lambda(\beta')[\Delta x'^0 - \beta'\varepsilon(\beta')\Delta x'^1], \\ \Delta x''^1 &= \lambda(\beta')(-\beta'\Delta x'^0 + \Delta x'^1) \end{aligned} \tag{2.14}$$

なる関係が成り立つ．この式に（2.13）を代入して右辺を Δx^0, Δx^1 で表すと

$$\begin{aligned} \Delta x''^0 &= \lambda(\beta)\lambda(\beta')[\{1+\beta\beta'\varepsilon(\beta')\}\Delta x^0 - \{\beta\varepsilon(\beta)+\beta'\varepsilon(\beta')\}\Delta x^1], \\ \Delta x''^1 &= \lambda(\beta')\lambda(\beta)[-(\beta+\beta')\Delta x^0 + \{1+\beta\beta'\varepsilon(\beta)\}\Delta x^1]. \end{aligned}$$

ここでこの変換が群をつくることを要請する．すなわち，上式と，O 系から O″ 系への直接の変換式

$$\begin{aligned} \Delta x''^0 &= \lambda(\beta'')[\Delta x^0 - \beta''\varepsilon(\beta'')\Delta x^1], \\ \Delta x''^1 &= \lambda(\beta'')(-\beta''\Delta x^0 + \Delta x^1) \end{aligned} \tag{2.15}$$

とが等しいとおく．ここで $c\beta''$ は O 系と O′ 系の間の相対速度である．すると Δx^0 と Δx^1 の係数が，それぞれ次の関係を満たさなければならない．

$$\begin{aligned} \lambda(\beta'') &= \lambda(\beta)\lambda(\beta')[1+\beta\beta'\varepsilon(\beta')] \\ &= \lambda(\beta')\lambda(\beta)[1+\beta\beta'\varepsilon(\beta)] \end{aligned} \tag{2.16 a}$$

および，

$$\beta''\lambda(\beta'') = \lambda(\beta)\lambda(\beta')(\beta+\beta'). \tag{2.16 b}$$

（もう1つ得られる関係式はこれらの式から導かれる．）

（2.16 a）の第1と2式により **ε は β によらない定数**であることがわかる．（2.16 a）を用いて（2.16 b）を変形すると

$$\beta'' = \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'\varepsilon} \tag{2.17}$$

を得る．これはいわゆる速度の合成則に対応するものである（後述）．

（2.12）および（2.13）において定数 ε が $\varepsilon=1$ であれば，これらの表式は明らかにローレンツ変換と一致し，（2.17）は相対論の速度の合成則となる．しかし，ε の値をこれ以上に決定することは，仮定1～3のみではできない．$\varepsilon=1$

を得るには，さらに物理的条件を課さなければならない．例えば，ミンコフスキー空間の4次元距離を不変にする (2.1) を満たすこと，あるいは，マクスウェル方程式を共変にすることの要請である．

このように，かなり一般的な幾何学的仮定と変換群の要請のみで，ローレンツ変換則と同形の疑似ローレンツ変換則が導かれる．その際の鍵は変換が群をつくるということである．このことをいち早く指摘したのはポアンカレであった．

a. 法則の客観性と変換群

次に，座標変換が群をつくることの意義を考察してみよう．先に指摘したように，物理法則が座標系の変換で不変であることは，その法則が客観性と普遍性を有するために必要である．さらに，**その変換が群をつくることは，その変換則の客観性と同時に，その変換の下で不変な理論の客観性を保証している．** そして以前（1-3節）で述べた物理量の定義が客観的であるために必要な同値関係の3条件，反射律，対称律および推移律に対応するものを変換群は有しているのである．

なぜならば，恒等変換（単位元）はそれ自身への変換であって，反射律（$a \sim a$）に対応し，個々の座標系が一義的に同定されることを意味する．逆変換は対称律（$a \sim b$ ならば $b \sim a$）に対応して，慣性系間の運動の相対性を含意している．すなわち，どちらの座標系からみても速度の大きさは等しく，方向を除き変換則は同形である．そして引き続く2つの変換が1つの変換で表されることは推移律（$a \sim b$，$b \sim c$ ならば $a \sim c$）に対応し，これはどの慣性系を基準にしてローレンツ変換を行っても，また1つの慣性系に移ることを保証している．よってすべての慣性系は同等であり，ローレンツ変換と慣性系とが客観的に定義されることを保証する．もし，変換が群をつくらないと，ある特定の基準座標系からの変換しかローレンツ変換とならない．つまり，変換が群をつくらなければ，基準座標系からローレンツ変換で移った慣性系を，もう一度座標変換すると第3の座標系は基準系に対してローレンツ変換で結ばれるとは限らない．したがって，すべての慣性系は同等とはいえないし，ローレンツ変換は普遍的でなくなる．以上の議論はローレンツ変換に限らず，当然すべての座標

変換群についても成り立つことである．

このように，**同値関係の3条件は物理量の客観的定義のために，そして変換が群をつくることは物理法則が客観性を有するために必要な条件である．** これによって，物理法則が座標系変換の下で不変であることと，その変換が群をなすことの重要な意義が理解されるであろう．

2-3　時間・空間尺度

いよいよローレンツ変換を用いて，時間・空間の尺度を求めよう．例によって，静止基準系Oに対して相対速度 v で x^1 軸方向に運動している慣性系O′をとる．逆ローレンツ変換（2.9）により

$$\Delta x^0 = \lambda(\Delta x'^0 + \beta\Delta x'^1) \tag{2.18}$$

いま，O′系に固定された時計の時間経過をO系から観測するとき，その時計のO′系での座標は一定なので $\Delta x'^1=0$ である．それゆえ，上式より

$$\Delta x^0 = \lambda\Delta x'^0, \quad \text{すなわち} \quad \Delta t' = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t. \tag{2.19}$$

この結果は，$\sqrt{1-\beta^2} \leqq 1$ であるから，$\Delta t' \leqq \Delta t$，すなわち運動しているO′系の時計を静止O系から見ると，その時の刻みは遅れて観測されることを意味する．運動の相対性により，O系の時計をO′系から観測するとやはり遅れて見える．

次に，空間尺度の関係を導くために，ローレンツ変換

$$\Delta x'^1 = \lambda(-\beta\Delta x^0 + \Delta x^1)$$

を用いる．O′系の x'^1 軸に沿って固定された長さ L' の物体（物差し）の長さをO系から測定する．この測定操作ではO系での同時刻に物体の両端の位置

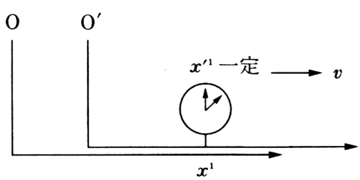


図2.3　時間の遅れ

を読みとらねばならない（O′ 系では物差しは静止しているので，同時刻に読まなくともよい）．したがって，上式で

$$\Delta x^0 = 0,\quad \Delta x'^1 = L',\quad \Delta x^1 = L$$

とおけば，求める長さ L と L' の関係を得る．

$$L' = \lambda L = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} \geqq L. \tag{2.20}$$

よって，運動物体を静止系で観測した値 L は，O′ 系に対して静止している観測者の測る長さ L' よりも $\sqrt{1-\beta^2}$ の割合で短く測定される．言うまでもなく，逆に O 系での長さ L の物体を，O′ 系から観測すると，運動の相対性により，測定値 L' は L より短くなる．この長さの短縮はローレンツ短縮と呼ばれている．

このように，互いに相対運動をしている **2 つの慣性系の間では，時間，空間の間隔について，同値や大小関係に関する対称律と推移律は成立しない**．しかし，**同一の慣性系においては対称律と推移律ともに成立する**から，異なる慣性系での値を同一慣性系に変換して比較すればよい．しかもその変換則はローレンツ変換により一義的に決まっている．よって，時間・空間の長さは客観性と普遍性を有するように定義されている．

a. 時間前後の逆転と因果律について

同時性が慣性系により異なるばかりでなく，2 つの事象の起こる時間の前後関係までも逆転することがある．O 系で 2 つの事象が世界点 A $(x_A{}^0, x_A{}^1)$ と B $(x_B{}^0, x_B{}^1)$ で生じたとしよう．それを O′ 系で観測したら，それぞれの時刻が $x'_A{}^0, x'_B{}^0$ であったとする．

するとローレンツ変換 (2.8) の第 1 式で $(\Delta x^0 = x_B{}^0 - x_A{}^0,\ \Delta x^1 = x_B{}^1 - x_A{}^1$ と置いて)

$$x'_B{}^0 - x'_A{}^0 = \lambda[x_B{}^0 - x_A{}^0 - \beta(x_B{}^1 - x_A{}^1)]. \tag{2.21}$$

この式から分かるように，空間距離 $x_B{}^1 - x_A{}^1$ が時間間隔 $x_B{}^0 - x_A{}^0$ より充分大きく，右辺の [ ] の中が負になるところ $(\Delta x^1/\Delta x^0 > \beta^{-1}$, 2 点 A, B が空間的距離にある）では，O 系で観測して事象 A が先に起こり事象 B が後から起こった場合 $(x_B{}^0 - x_A{}^0 > 0)$ でも，O′ 系では事象 A が B よりも遅れて起こった

$(x'_{\mathrm{B}}{}^0 - x'_{\mathrm{A}}{}^0 < 0)$ と観測される．

それでも物理的に困ることはない．2つの事象 A，B は空間的距離にあるので，最大速度の光（相対論では光速度が最大）すらその時間内に到達できないから，互いに作用は及ばないので，A と B は原因・結果の関係にない．それゆえ，原因より先に結果が起こるといった因果律に抵触するようなことはない．

b.　固有時間

時間経過は慣性系ごとに異なるので，運動物体はそれぞれ固有の時刻を刻んでいることになる．いま，運動系 O′ に静止している時計の時間経過を別の座標系から見よう．時計は O′ 系に静止しているから，$\varDelta x'^i = 0$ である．$\varDelta s$ はローレンツ変換で不変であるから

$$(\varDelta s)^2 = (\varDelta s')^2 = (\varDelta x'^0)^2.$$

したがって，$\varDelta x'^0$ もローレンツ変換の下で不変な量となり，運動系 O′ で測定した時間経過 $\varDelta x'^0$ はその時計に固有な時間である．このように，時計に固定された座標系での時間をその時計の固有時間と呼んでいる．

この固有時間に対して，時計と共に運動していない一般の慣性系 O の世界間隔（時間・空間間隔）を $\varDelta x^\mu$ とすると

$$(\varDelta x'^0)^2 = (\varDelta x^0)^2 - \sum (\varDelta x^i)^2 \leqq (\varDelta x^0)^2.$$

この時間 $\varDelta x^0$ は座標系のとり方に依存するので，座標時間と呼ぶ．

固有時間を τ で表すと，

$$c\varDelta\tau = \varDelta x'^0 = \sqrt{(\varDelta x^0)^2 - \sum (\varDelta x^i)^2}$$

となる．

時計，あるいはその時計と共に運動する座標系が加速する場合は，固有時間の刻みも刻々変化する．その場合は，微小時間の間は速度は一定とみなしてよいから，微小時間間隔について，瞬間の速度 β に対する固有時間を定義する．すると上の式から

$$d\tau = dx^0\sqrt{1-\beta^2} = ds \tag{2.22}$$

と表される．

時計の世界線 $\varDelta x'^\mu$ は明らかに時間的間隔であるから，$\varDelta\tau = \varDelta x'^0/c$ は実数時間，したがって，上式から $\varDelta x^0$ も実数時間である．特に，時計の速度が光速度

$(\beta=1)$ のとき，$\Delta\tau=0$，すなわち，光速度で運動している座標系では時間は経過しない．一般に，光速度以下で運動している場合の世界線は時間的距離であるから，その固有時間 $\Delta\tau$ は実数であり，光速度以上で運動している座標系の固有時間は虚数となる．

蛇足ながら付言すると，運動系での時計の遅れ，距離の短縮の原因は慣性系ごとに同時性や時間・空間尺度が異なるところにある．運動系の現象を静止系から見るとそのように観測されるのであり，実際に運動系で時計が遅れたり長さが短縮しているのではないということである．この点がマイケルソン-モーレイの実験を説明するために仮定されたフィッツジェラルド-ローレンツ短縮とは物理的内容が違うのである．また，相対性理論ではローレンツ理論と違い物質のない真空の空間距離もすべて一様に短縮して観測される． 高速で飛行しているロケットの中ではすべての現象は正常に進行する．事実，地球は遠い銀河系に対して，ほぼ光速度で運動しているが，地上では物体の短縮も時間の遅れもなく物事は正常に経過している．

2-4 観測者，時計，物差しについて

これまでの説明では，各慣性系に観測者と物差し，時計を置いて話を進めてきた．本書に限らずほとんど相対論の解説にこの方法がとられている．そのために人工的時計と物差しによって観測するという人為的行動が相対論にくくり付けになっていて，観測者の存在が理論のなかに必然的に組み込まれているかの如き誤解が生ずることがある．しかし，このことは話を分かり易くするための便宜的な手段であり，それら人工的観測手段や観測者を備える必要は必ずしもないのである．

自然現象は人間がそれを観測するしないにかかわらずある自然法則にしたがって進行している．その自然法則を人間が認識し，不完全ながらも理論化するのが自然科学である．人間の記憶，思考，心理などを対象とする科学の場合は人間の存在と行動がその理論体系のなかに必然的に組み込まれるが，物理現象の場合は人間の観測とは無関係に進行しているものがある．相対論はそれら自然現象を支配している自然法則に関する理論である．

観測者も物質も何もない座標系を空間の中に想定しても物理的には無意味である．だが，物体に付随して一緒に運動する座標系は観測者がいなくとも物理的には立派に意味をもっている．むしろ自然界の運動の１つ１つを人間が観測しているわけではないが，物質運動の相互関係は相対論の法則によって結ばれているといえる（相対性理論が正しいとして）．たとえば，運動する２物体の相互作用を考えよう．２物体の間に何ら相互作用がなければ，それら２物体の間の関係を論ずることは無意味である．何ら一切の相互作用のない“物体”はすぐ側を通過しても互いにその存在すら認知しえないから，物理的物質ではなく，物理的対象とはならない．そこでたとえば２物体ＡとＢとが互いに電磁力により相互作用しているとしよう．Ａ上の１点Ｐには，Ｂ上の各点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ からの電磁気力が作用しているが，Q_1, Q_2 からでた作用がＰに達する時刻や作用の強さ（PQ_1, PQ_2 の距離に依存）などの物理的関係は，ローレンツ変換によって規定された時間・空間の中で決まるのである．したがって，相対論的時空尺度は相互作用する物質と物質との間の客観的関係を与えるものであって，人工的物差しや時計は必要ない．その物体の大きさ，あるいはそれを構成している原子の大きさなどが物差しの役をし，また原子の振動周期が時計の役をしている．そして，上で述べたように相互作用する物体自体が互いの観測者なのである．

そのよい実例が，地上に降り注ぐ宇宙線中の μ 粒子の現象である．１次宇宙線が大気中に突入し，酸素や窒素の原子核と衝突して多数の π 中間子を発生するが，π 中間子は短時間で μ 粒子と中性微子に崩壊してしまう．さらに，μ 粒子は平均寿命 2×10^{-6} 秒で電子と中性微子に崩壊する．それゆえ，相対論による寿命の延びがなければ μ 粒子は高々600 m 程度の走行距離しか生き残れな

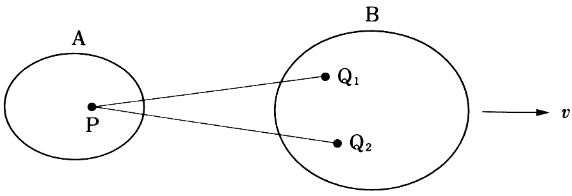


図 2. 4　物体 A，B の相対運動と相互関係

い．1次宇宙線によりπ中間子が発生する高度は平均10 kmの上空であるにもかかわらず，高速度のμ粒子は相対論による寿命の延びのために，かなりの数が地下深く突入している．この現象は人間が観測しなくとも昔から続いていて地球の岩石などにμ粒子飛来の痕跡を残しているし，現在も観測されている．このように，長さや時間の関係は2物体（この例では地球とμ粒子）の相対運動で決まり，地球が観測者なのである．

3章　ローレンツ変換群

前章では2つの慣性系の座標軸が平行で，かつ相対速度が x^1 軸に沿った場合のローレンツ変換を求めた．しかし，最も一般的なローレンツ変換はミンコフスキー空間の中の任意の1次変換（ただし行列式の値が ±1）である．そしてそれらの変換は変換群をつくる．本章では一般的ローレンツ変換を求め，それらの物理的性質を考察する．

3-1　空間回転を伴わないローレンツ変換

後の説明の便宜のため，まず2つの慣性系 O と O′ の座標軸が平行で，相対速度 $\boldsymbol{v}$ の方向が任意である場合のローレンツ変換を導いておく．

ローレンツ変換は慣性系間の相対速度 $\boldsymbol{v}$ に平行な空間成分と時間成分のみ変換され，$\boldsymbol{v}$ に垂直成分は変化しないから，3次元空間成分 $\varDelta x^i$ を $\boldsymbol{v}$ に平行な成分 $\boldsymbol{x}_{\parallel}$ と垂直な成分 $\boldsymbol{x}_{\perp}$ で表す．すると

$$\varDelta \boldsymbol{x}_{\parallel} = \frac{(\varDelta \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2},$$

$$\varDelta \boldsymbol{x}_{\perp} = \varDelta \boldsymbol{x} - \varDelta \boldsymbol{x}_{\parallel} = \varDelta \boldsymbol{x} - \frac{(\varDelta \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2} \tag{3.1}$$

と表される．$\varDelta \boldsymbol{x}'_{\parallel}$ と $\varDelta \boldsymbol{x}'_{\perp}$ に対しても同様の式が成り立つ．

$\varDelta \boldsymbol{x}_{\parallel}$ と $\varDelta \boldsymbol{x}'_{\parallel}$ とは，以前求めたローレンツ変換（2.8）と同形の変換則に従うから

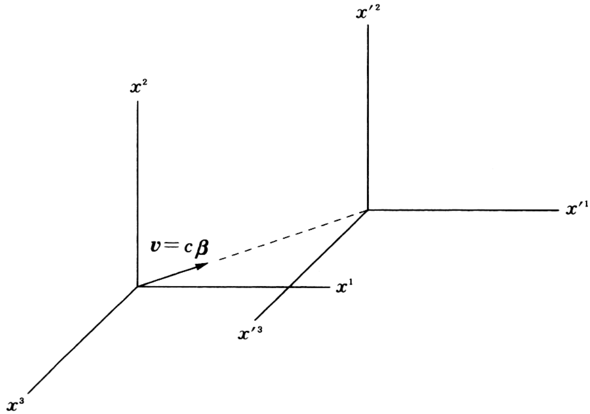


図3.1　任意方向のローレンツ変換

$$\begin{aligned}
\varDelta x'^0 &= \lambda(\beta)(\varDelta x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\varDelta \boldsymbol{x}_{\|}),\\
\varDelta \boldsymbol{x}'_{\|} &= \lambda(\beta)(-\boldsymbol{\beta}\varDelta x^0 + \varDelta \boldsymbol{x}_{\|}),\\
\varDelta \boldsymbol{x}'_{\perp} &= \varDelta \boldsymbol{x}_{\perp}.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

ここで $\boldsymbol{\beta}$ と λ は前と同じ

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c},\quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}}$$

であるが，太字 $\boldsymbol{\beta}$ は3次元ベクトルを，また太字の $\boldsymbol{\beta}\cdot\varDelta\boldsymbol{x}_{\|}$ などは3次元ベクトルのスカラー積を表す．(3.1) と (3.2) とから

$$\frac{(\varDelta\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} = \lambda\left[-\boldsymbol{\beta}\varDelta x^0 + \frac{(\varDelta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2}\right],$$

$$\varDelta\boldsymbol{x}' - \frac{(\varDelta\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} = \varDelta\boldsymbol{x} - \frac{(\varDelta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2}$$

が成り立つ．この両式を合わせると求めるローレンツ変換が得られる．

$$\begin{aligned}
\varDelta x'^0 &= \lambda(\varDelta x^0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\varDelta\boldsymbol{x}),\\
\varDelta\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{\beta}\left(-\lambda\varDelta x^0 + \frac{\lambda-1}{\boldsymbol{\beta}^2}\boldsymbol{\beta}\cdot\varDelta\boldsymbol{x}\right) + \varDelta\boldsymbol{x}.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

このローレンツ変換は2つの慣性系の座標軸が平行で，相対速度が x^1, x^2 および x^3 軸方向の場合のローレンツ変換を組み合わせたものである．x^1 方向のローレンツ変換 (2.8) は，$\boldsymbol{\beta}$ が x^1 軸方向，すなわち $\beta^1=\beta$，$\beta^2=0$，$\beta^3=0$ の

特殊ケースとして，(3.3) に含まれる．

3-2　ローレンツ変換の行列表示

ローレンツ変換は世界線 $\varDelta s$ を不変にする 4 次元ミンコフスキー空間の斉 1 次変換であるから，4 行 4 列の行列で表すのが便利である．

$\varDelta x^{\mu}, \varDelta x'^{\mu}$ を縦に並べた行列表示をそれぞれ $\varDelta x, \varDelta x'$ と記し，ミンコフスキー空間の計量を行列 η で，そしてローレンツ変換の行列を L で表す．

$$\varDelta x = \begin{pmatrix} \varDelta x^0 \\ \varDelta x^1 \\ \varDelta x^2 \\ \varDelta x^3 \end{pmatrix},\quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad L = \begin{pmatrix} L^0{}_0 & L^0{}_1 & L^0{}_2 & L^0{}_3 \\ L^1{}_0 & L^1{}_1 & L^1{}_2 & L^1{}_3 \\ L^2{}_0 & L^2{}_1 & L^2{}_2 & L^2{}_3 \\ L^3{}_0 & L^3{}_1 & L^3{}_2 & L^3{}_3 \end{pmatrix}$$

するとローレンツ変換は，

$$\varDelta x' = L\varDelta x \tag{3.4 a}$$

これを成分で書くと

$$\varDelta x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\varDelta x^{\nu} \tag{3.4 b}$$

と表される．

この記法により世界線の不変式 (2.1) は次のように表される．

$$(\varDelta s)^2 = \varDelta x^{\mathrm{t}}\eta\varDelta x = (L\varDelta x)^{\mathrm{t}}\eta L\varDelta x = \varDelta x^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}}\eta L\varDelta x$$

ここで，上付き記号 t は転置行列を意味する．これから，ローレンツ変換を表す行列 L の満たすべき条件は

$$\eta = L^{\mathrm{t}}\eta L \tag{3.5}$$

となる．(3.5) の両辺の行列式より

$$\det(L^{\mathrm{t}}L) = [\det(L)]^2 = 1$$

$$\therefore \quad \det(L) = \pm 1 \tag{3.6}$$

を得る．ローレンツ変換の不変式は斉 2 次形式であるから，行列式の ± 符号は排除できない．変換行列の行列式の値が ±1 というのは，ユークリッド空間の回転を表す直交行列と同じであるが，行列 L の性質は (3.5) に見られるように η を挟んで定義されているところが違う（直交行列は η の代りに単位行列である）．行列式が +1 と −1 の場合の変換は時間・空間反転と関係してい

るが，その意味は後に述べる．

相対速度が x^1 軸に平行な場合のローレンツ変換 (2.8) を与える $L(\beta)$ は次のように書ける．

$$L(\beta)=\begin{pmatrix} \lambda & -\beta\lambda & 0 & 0 \\ -\beta\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

さらに，これを一般化した，回転を伴わない任意方向 $\boldsymbol{\beta}$ のローレンツ変換 (3.3) に対応する行列表示は

$$L(\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix} \lambda & -\beta^1\lambda & -\beta^2\lambda & -\beta^3\lambda \\ -\beta^1\lambda & 1+\dfrac{\beta^1\beta^1}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & \dfrac{\beta^1\beta^2}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & \dfrac{\beta^1\beta^3}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) \\ -\beta^2\lambda & \dfrac{\beta^2\beta^1}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & 1+\dfrac{\beta^2\beta^2}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & \dfrac{\beta^2\beta^3}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) \\ -\beta^3\lambda & \dfrac{\beta^3\beta^1}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & \dfrac{\beta^3\beta^2}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) & 1+\dfrac{\beta^3\beta^3}{\boldsymbol{\beta}^2}(\lambda-1) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

となる．$\boldsymbol{\beta}$ が x^1 軸方向のとき，(3.8) は (3.7) になる．また

$$\det[L(\boldsymbol{\beta})]=1 \tag{3.9}$$

$$L(\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{t}}\eta L(\boldsymbol{\beta})=\eta \tag{3.10}$$

であることは少し計算すると確かめることができる．

3-3　空間回転を伴うローレンツ変換

空間回転を伴う一般のローレンツ変換は，上式のローレンツ変換と空間回転を組み合わせてつくることができる．3次元空間回転を表す行列 R はよく知られているように直交行列で

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & r^i{}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$R^{\mathrm{t}}R=I,\quad \text{すなわち}\quad R^{\mathrm{t}}=R^{-1} \tag{3.12}$$

$$\det(R) = \pm 1$$

である．ここで I は単位行列である．R の中の $r^i{}_j$ は 3 行 3 列の行列で (3.12) を満たす任意の実数である．行列式の値が $+1$ の R は純粋空間回転を，-1 の R は空間反転を含む回転を表す．

ここで x^1 方向のローレンツ変換 (3.7) と任意方向のローレンツ変換 (3.8) の関係を示しておこう．

$\boldsymbol{\beta}$ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}=(\beta^1, \beta^2, \beta^3)/\beta$ とし，$\boldsymbol{n}$ に直交し，かつ互いに直交する 2 つの 3 次元単位ベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする．

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0. \tag{3.13}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{n}$ 軸回りの回転の任意性があるので一義的には決まらない．これら 3 つのベクトルを用いて次の行列をつくる．

$$R_{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^1 & n^2 & n^3 \\ 0 & a^1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\det(R_{\boldsymbol{n}}) = 1, \quad R_{\boldsymbol{n}}{}^{\mathrm{t}} R_{\boldsymbol{n}} = 1.$$

この $R_{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ を x^1 軸方向に揃える．また $R_{\boldsymbol{n}}{}^{\mathrm{t}}$ はその逆に x^1 軸を $\boldsymbol{n}$ に揃える空間回転の行列である．

すると $R_{\boldsymbol{n}}$ により $L(\beta)$ と $L(\boldsymbol{\beta})$ とは次式で結ばれることが容易に確かめられる．

$$L(\boldsymbol{\beta}) = R_{\boldsymbol{n}}{}^{\mathrm{t}} L(\beta) R_{\boldsymbol{n}} \tag{3.15 a}$$

あるいは逆に

$$L(\beta) = R_{\boldsymbol{n}} L(\boldsymbol{\beta}) R_{\boldsymbol{n}}{}^{\mathrm{t}}. \tag{3.15 b}$$

また一般の空間回転の R とローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ を用いて，回転を伴う一般的ローレンツ変換 L はすべて

$$L = L(\boldsymbol{\beta}) R \tag{3.16 a}$$

あるいは

$$L = R L(\boldsymbol{\beta}) \tag{3.16 b}$$

と表すことができる．すなわち，まず空間回転 R によって 2 つの慣性系の座標軸を平行に揃えた後に，2 つの座標系の原点を結ぶローレンツ変換を行うか，

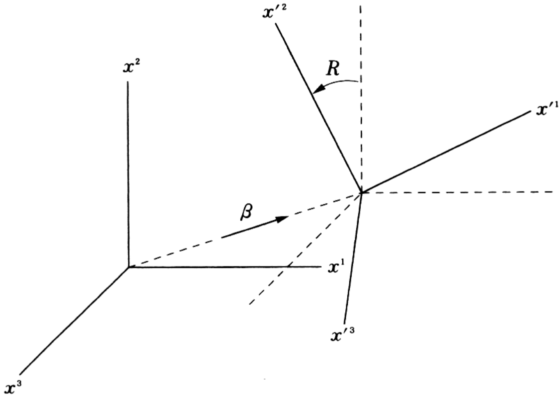


図 3.2　座標軸が平行でない場合のローレンツ変換

あるいは，最初に 2 つの座標系を結ぶ方向のローレンツ変換を行った後に，空間回転 R により空間座標軸を最後のものに揃えればよい．

さらに (3.15) を用いれば，(3.16) は

$$L = R_n{}^{\mathrm{t}}L(\beta)R_nR,\quad \text{あるいは}\quad RR_n{}^{\mathrm{t}}L(\beta)R_n$$

となる．R と R_n とは空間回転の行列であるから，まとめて 1 つの空間回転行列で表すことができるので，結局任意のローレンツ変換は

$$L = R'L(\beta)R \tag{3.17}$$

と分解される．R' も空間回転の行列である．

大切なことは，任意のローレンツ変換は $L(\boldsymbol{\beta})$，あるいは $L(\beta)$ を用いてそれぞれ (3.16) または (3.17) のように，分解し表現されることである．すると，ローレンツ変換の本質的な性質は $L(\boldsymbol{\beta})$ または $L(\beta)$ を調べればわかることになる．

(3.16) および (3.17) で表される L がローレンツ変換であること，すなわち Δs を不変にする条件 (3.5) を満たすことは，次に示すように容易に確かめられる．

η の 3 次元空間部分は負符号を除いて単位行列であるから，任意の空間回転 R に対して $R\eta=\eta R$ である．よって

$$R^{\mathrm{t}}\eta R = \eta R^{\mathrm{t}}R = \eta$$

この関係式と (3.5)，(3.10) を用いて，(3.16) の場合に

$$L^{\mathrm{t}}\eta L = \{R^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\beta})\}\eta\{L(\boldsymbol{\beta})R\}$$
$$= R^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\beta})\eta L(\boldsymbol{\beta})R = R^{\mathrm{t}}\eta R = \eta. \tag{3.18 a}$$

また (3.17) の場合は

$$L^{\mathrm{t}}\eta L = \{R^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}}(\beta)R'^{\mathrm{t}}\}\eta\{R'L(\beta)R\}$$
$$= R^{\mathrm{t}}L^{\mathrm{t}}(\beta)\eta L(\beta)R = R^{\mathrm{t}}\eta R = \eta. \tag{3.18 b}$$

これで，回転を伴う任意の L はローレンツ変換であることが確認された．また (3.16) と (3.17) の行列 L の行列式は明らかに ± 1 である．

ここでついでに，L^{t} と L の逆変換 L^{-1} との関係を求めておこう．$\eta^2=I$ であるから，(3.18) に右から L^{-1} を，左から η を乗じて

$$L^{-1} = \eta L^{\mathrm{t}}\eta \tag{3.19}$$

を得る．

以上のことから任意のローレンツ変換は (3.16) または (3.17) の形式で表されることがわかった．一般に，(3.5) を満たすローレンツ変換はすべて (3.16) または (3.17) の積に分解できることが厳密に証明されている．その証明は省略するが，定性的には次のように理解される．ローレンツ変換は 4×4 行列であるから，16 の要素を持つ．しかし，$L^{\mathrm{t}}\eta L=\eta$ は行と列について対称であるから，10 個の条件を与えるので，独立なパラメータは 6 個である．(3.17) の場合には，最初任意方向を向いている座標系の x^1 軸をローレンツ変換の方向に揃えるための空間回転を行う．空間回転は一般には 3 個のパラメータで表されるが，x^1 軸を揃えるだけなら x^2, x^3 軸は任意であるから，R は 2 つのパラメータですむ．次に x^1 軸方向のローレンツ変換 $L(\beta)$ は 1 つのパラメータ β のみで表される．最後に，3 つの座標軸を任意方向に回転させるのに R' は 3 つのパラメータが必要である．これでパラメータは合計 6 個となり，過不足なく一般のローレンツ変換は $R'L(\beta)R$ と分解されることがわかる．

(3.16) の場合は，任意方向のローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ は 3 個のパラメータ β^i を含み，任意の空間回転 R の 3 個と合わせて 6 個となる．

引き続く 2 つのローレンツ変換 L_1 と L_2 の積 $L_3=L_2L_1$ も明らかに行列式は ± 1 である．そしてさらに

$$L_3{}^{\mathrm{t}}\eta L_3 = L_1{}^{\mathrm{t}}L_2{}^{\mathrm{t}}\eta L_2L_1 = L_1{}^{\mathrm{t}}\eta L_1 = \eta \tag{3.20}$$

となるから，ローレンツ変換の条件 (3.5) を満たす．よって，L_3 も (3.16) または (3.17) の形に分解されることがわかる．

ただし，任意方向のローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ の積には注意すべきことがある．引き続く 2 つの変換を $L(\boldsymbol{\beta}_1), L(\boldsymbol{\beta}_2)$ とする．ここで (3.8) の行列表示を用いて積 $L(\boldsymbol{\beta}_2)L(\boldsymbol{\beta}_1)$ を計算すると，一般には (3.8) のように対称行列とならず，$L(\boldsymbol{\beta}_3)$ の形にまとまらない．すなわち，純粋に回転を伴わぬローレンツ変換とはならないことがわかる．その理由は，ローレンツ変換によって相対速度方向の長さのみ短縮され，垂直方向は不変であるために，空間座標軸に一種の回転効果が現れ，その結果，引き続くローレンツ変換にその回転の影響が及ぶからである．したがって，一般的には

$$L(\boldsymbol{\beta}_2)L(\boldsymbol{\beta}_1) = R_{12}L(\boldsymbol{\beta}_3) \tag{3.21}$$

という関係が成り立つ (3-5 節参照)．ここに R_{12} は $\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ によって定まる 3 次元空間回転の行列である．

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (R_{12})^i{}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

そして，$\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ とが平行の場合にのみ，$R_{12}=1$ となる．$\boldsymbol{\beta}_3$ の具体的表式は 3-5 節で求める．

これら $L(\beta)$ や $L(\boldsymbol{\beta})$ の式から，すでに (2.18) で見たものと類似の相対論の速度合成則が導かれる (3-5 節)．

3-4　反転を含むローレンツ変換

ここで以前から懸案にしていた，行列式が -1 のローレンツ変換の物理的意味を考察しよう．純粋のローレンツ変換 (3.8) の行列式は $+1$ であるが，R が時間・空間反転を含むと行列式は-1 になる．純空間反転を与える行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(P) = -1 \tag{3.23}$$

あるいは，1つの空間軸を反転する行列は上の P で2，3，4行のどれか1つを -1 にし，他の2つは $+1$ にしたものである．空間成分の2つを -1 にした行列式は $+1$ であり，他の空間軸回りの180度回転で移れるから反転ではない．空間反転を含む一般の空間回転は純回転 R_{r} と P との積で表される．

$$R = PR_{\mathrm{r}} = R_{\mathrm{r}}P. \tag{3.24}$$

また，純時間反転の行列 T は

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(T) = -1. \tag{3.25}$$

時間反転を含む一般の空間回転の行列は

$$R = TR_{\mathrm{r}} = R_{\mathrm{r}}T \tag{3.26}$$

である．さらに，時間と空間の反転を同時に行う行列は $PT = TP$ で表され，その行列式は $+1$ である．

これらの反転行列 P と T を奇数個含むローレンツ変換の行列式は -1 であり，P, T を全く含まないもの，および偶数個含むものの行列式は $+1$ となる．したがって，行列式の符号だけでは反転を含むか否か判定できないから，さらに別の判定条件が要る．これがユークリッド空間の場合と質的に異なる点である．その判定条件を求めよう．

まず，ローレンツ変換行列の $L^0{}_0$ 要素は空間回転 R と反転行列 P では不変であり，時間反転行列 T のみで符号が変わる．任意方向のローレンツ変換 (3.8) を見ると $L^0{}_0 = \lambda \geqq 1$．さらに，すべてのローレンツ変換において，$L^0{}_0$ の絶対値は1以上であることは容易にわかる．ローレンツ変換の条件式 (3.5) の00成分を見ると

$$(L^{\mathrm{t}})_0{}^{\mu}\eta_{\mu\nu}L^{\nu}{}_0 = (L^0{}_0)^2 - \Sigma(L^i{}_0)^2 = 1$$
$$(L^0{}_0)^2 = 1 + \sum(L^i{}_0)^2 \geqq 1$$

$$\therefore \quad L^0{}_0 \geqq 1 \quad \text{または} \quad L^0{}_0 \leqq -1 \tag{3.27}$$

反転も含めた一般的ローレンツ変換は $L=R'L(\beta)R$ で表されるから，結局次のように分類される．

$$\begin{aligned} &1)\quad L^0{}_0 \geqq 1,\quad \det(L) = 1：\text{本義ローレンツ変換} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\;\; = -1：\text{空間反転ローレンツ変換} \\ &2)\quad L^0{}_0 \leqq -1,\quad \det(L) = -1：\text{時間反転ローレンツ変換} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 1：\text{時間空間反転ローレンツ変換} \end{aligned} \tag{3.28}$$

以上のことをまとめると，最も一般的ローレンツ変換は

$$\begin{aligned} &L^{\mathrm{t}}\eta L = \eta, \quad L = R'L(\beta)R, \\ &\det(L) = \pm 1 \end{aligned} \tag{3.29}$$

で表される．上式で R は一般の回転行列で反転を含む場合もある．そして，ローレンツ変換は全体で変換群をつくるが，その中で特に本義ローレンツ変換はそれだけで部分群をつくる．部分群というのは，ある群の中の要素の部分集合がそれだけで群をつくるとき，それを元の群の部分群という．反転を含むローレンツ変換はその行列式が -1 なので，それのみでは部分群にならない（2つの積の行列式が必ず $+1$ になるので行列式が -1 のみでは閉じない）．また，時間空間反転ローレンツ変換は行列式は $+1$ だが，恒等変換（単位行列）を持たないので，やはりそれのみでは部分群にならない．すなわち，ローレンツ変換が群をなすためには少なくとも空間回転を伴わない本義ローレンツ変換を含んでいる必要がある．さらに，付け加えるならば，(3.21) により回転を伴わないローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ で $\boldsymbol{\beta}$ が平行なものの全体（$R_{12}=1$）は本義ローレンツ変換の部分群をつくる．さらにその特殊な場合として，(3.7) で表される x^1 方向の純ローレンツ変換 $L(\beta)$ の全体はまた部分群である．

3-5　ローレンツ変換の積と速度の合成則

ローレンツ変換が群をつくることを用いて速度の合成則が導かれる．最も簡単な場合は，x^1 方向の相対速度がそれぞれ β_1, β_2 の速度合成である．x^1 方向の2つのローレンツ変換をそれぞれ $L(\beta_1)$ および $L(\beta_2)$ で表すと，これらロ

ーレンツ変換の積がまた1つのローレンツ変換 $L(\beta_3)$ で表される．この合成ローレンツ変換 $L(\beta_3)$ の速度 β_3 が β_1 と β_2 の相対論的速度の和を与えるとするのは正当であろう．そこで (3.7) の表示を用いて

$$L(\beta_1)L(\beta_2)=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2(1+\beta_1\beta_2) & -\lambda_1\lambda_2(\beta_1+\beta_2) & 0 & 0\\ -\lambda_1\lambda_2(\beta_1+\beta_2) & \lambda_1\lambda_2(1+\beta_1\beta_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_3 & -\lambda_3\beta_3 & 0 & 0\\ -\lambda_3\beta_3 & \lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=L(\beta_3)$$

上の式で λ_n は $\lambda(\beta_n)$ の略記である．ここで両辺の各要素が等しいと置いて次式を得る

$$\lambda_1\lambda_2(1+\beta_1\beta_2)=\lambda_3,\quad \lambda_1\lambda_2(\beta_1+\beta_2)=\beta_3\lambda_3$$

$$\therefore\quad \beta_3=\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}. \tag{3.30}$$

この (3.30) はよく知られている最も単純な相対論の速度合成則である．

任意方向の速度 $\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ の合成則も (3.8) のローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ を (3.21) に代入し，両辺を比較すれば同様に求めることができる．

ところで $\beta^0=dx^0/dx^0=1$ を考慮すると，(3.8) の第1列と第1行の要素は，$\lambda\beta^\mu$ と表されることに気付く．この $\lambda\beta^\mu$ は実はミンコフスキー空間の4元ベクトルであり，Δx^μ と同じローレンツ変換をうけるのである (5-1節参照)．これに対して，$(i\mu)$ および (μi) 成分は単純な4元ベクトルではないので，回転効果を含む複雑な変換式となる．

さて，(3.8) の $\boldsymbol{\beta}$ に $\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ を代入した $L(\boldsymbol{\beta}_1)$，$L(\boldsymbol{\beta}_2)$ の積を求めよう．この積の行列の第1行 (0μ 要素) と第1列 ($\mu 0$ 要素) は簡単でそれぞれ

$$(0\mu)\text{要素}：L(\boldsymbol{\beta}_1)^\mu{}_\nu(\lambda_2\beta_2{}^\nu)$$

$$(\mu 0)\text{要素}：(\lambda_1\beta_1{}^\nu)L^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\beta}_2)_\nu{}^\mu=L(\boldsymbol{\beta}_2)^\mu{}_\nu(\lambda_1\beta_1{}^\nu)$$

となる．$\lambda\beta^\mu$ は4元ベクトルであるから，ローレンツ変換後また同形の4元ベクトルになる (x^μ が x'^μ になったように)．すると，上記の変換式はまた4元

ベクトル $\lambda_3\beta_3{}^\mu$ の形式になるべきである．よって，

$$(0\mu)\text{要素}：L(\boldsymbol{\beta}_1)^\mu{}_\nu(\lambda_2\beta_2{}^\nu) = \lambda_3\beta_3{}^\mu \tag{3.31 a}$$

$$(\mu 0)\text{要素}：L(\boldsymbol{\beta}_2)^\mu{}_\nu(\lambda_1\beta_1{}^\nu) = \lambda_3\beta_3{}'^\mu \tag{3.31 b}$$

と置くことができる．一般に，$L(\boldsymbol{\beta}_1)$ と $L(\boldsymbol{\beta}_2)$ とは交換可能でないから，$\boldsymbol{\beta}_3 \neq \boldsymbol{\beta}_3{}'$ である．ただし，λ_3 は（00）要素が共通なので（3.31 a）と（3.31 b）で同じである．

（3.31）を具体的に書くと

$$(3.31\text{ a})\text{ の 0 成分}：\lambda_1\lambda_2(1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2) = \lambda_3, \tag{3.32 a}$$

k 成分：

$$\lambda_1\lambda_2\beta_1{}^k - \lambda_2\beta_2{}^k - \frac{(\lambda_1-1)\lambda_2\beta_1{}^k}{(\boldsymbol{\beta}_1)^2}(\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2) = \lambda_3\beta_3{}^k. \tag{3.32 b}$$

（3.31 b）の 0 成分：（3.32 a）と同じ，

k 成分：

$$\lambda_2\lambda_1\beta_2{}^k - \lambda_1\beta_1{}^k - \frac{(\lambda_2-1)\lambda_1\beta_2{}^k}{(\boldsymbol{\beta}_2)^2}(\boldsymbol{\beta}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_1) = \lambda_3\beta_3{}'^k. \tag{3.32 c}$$

（3.32 a）の λ_3 の式を（3.32 b，c）に代入すれば求める合成速度 $\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3{}'$ を得るが，式の内容を理解し易いように書き換えてみよう．$\boldsymbol{\beta}_1$ に平行な $\boldsymbol{\beta}_2$ の成分と，垂直な成分はそれぞれ

$$\boldsymbol{\beta}_{2\parallel} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2}{(\boldsymbol{\beta}_1)^2}\boldsymbol{\beta}_1, \qquad \boldsymbol{\beta}_{2\perp} = \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_{2\parallel} \tag{3.33}$$

と表される．したがって，（3.32 b，c）から得られる速度合成則は以下のようになる．

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_{2\parallel} + \boldsymbol{\beta}_{2\perp}/\lambda_1}{1+\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2}. \tag{3.34 a}$$

同様に，$\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ を入れ替えて，$\boldsymbol{\beta}_2$ に平行な $\boldsymbol{\beta}_1$ の成分と垂直な成分をそれぞれ $\boldsymbol{\beta}_{1\parallel}$ および $\boldsymbol{\beta}_{1\perp}$ で表すと

$$\boldsymbol{\beta}_3{}' = \frac{\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_{1\parallel} + \boldsymbol{\beta}_{1\perp}/\lambda_2}{1+\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2} \tag{3.34 b}$$

を得る．

特別な場合として，$\boldsymbol{\beta}_1$ が x^1 方向の場合の速度合成則はよく見かけるが，（3.34）はその表式と本質的に同形である．

ここで注意すべきは，速度合成則の表式 (3.34 a) と (3.34 b) は異なっていることである．(3.31) から類推されるように (3.34 a) の $\boldsymbol{\beta}_3$ は $\boldsymbol{\beta}_2$ を $\boldsymbol{\beta}_1$ 方向にローレンツ変換して得られた式であり，したがって $\boldsymbol{\beta}_1$ を基準にして $\boldsymbol{\beta}_2$ を加えた加法則（基準系に対して速度 $\boldsymbol{\beta}_1$ で運動している系において速度 $\boldsymbol{\beta}_2$ を有する場合）である．他方，(3.34 b) の $\boldsymbol{\beta}_3'$ は逆に $\boldsymbol{\beta}_1$ を $\boldsymbol{\beta}_2$ 方向にローレンツ変換して得られたもので，したがって $\boldsymbol{\beta}_2$ を基準にして $\boldsymbol{\beta}_1$ を加えた加法則（基準系に対して速度 $\boldsymbol{\beta}_2$ で運動している系において速度 $\boldsymbol{\beta}_1$ を有する場合）である．

(3.34) において $\beta_1{}^k=1$ と置くと (他の成分は 0)，$1/\lambda_1=0$，$\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_2=\beta_{2\parallel}=\beta_2{}^k$ となるから，合成速度 $\beta_3{}^k=1$ である．すなわち，光速度 c が最大速度であることが示される．

ローレンツ変換によって，変換速度に垂直成分は変化せず，平行成分のみ変換されるので，どの基準系で合成速度を見るかにより結果は一般に異なる．それが (3.34 a，b) の 2 式の意味である．両式が一致するのは $\boldsymbol{\beta}_1 /\!/ \boldsymbol{\beta}_2$ のとき ($\boldsymbol{\beta}_{2\perp}=\boldsymbol{\beta}_{1\perp}=0, \boldsymbol{\beta}_{1\parallel}=\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_{2\parallel}=\boldsymbol{\beta}_2$) だけであることは，これらの式から明らかである．ただし，合成速度 $\boldsymbol{\beta}_3$ の 3 次元の長さはいずれの場合も等しい．実際に，(3.34 a)，(3.34 b) ともに

$$(\boldsymbol{\beta}_3)^2=(\boldsymbol{\beta}_3')^2=1-[\lambda_1\lambda_2(1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2)]^{-2} \tag{3.35}$$

となる．

また，ここに得られた $\boldsymbol{\beta}_3$ と $\boldsymbol{\beta}_3'$ は (3.32 a) の λ_3 と整合的であること，すなわち

$$\lambda_3=\frac{1}{\sqrt{1-(\boldsymbol{\beta}_3)^2}} \tag{3.36}$$

を満たすことは (3.32 a)，(3.35) から明らかである．

以上の結果から

$$L(\boldsymbol{\beta}_2)L(\boldsymbol{\beta}_1)=\begin{pmatrix} \lambda_3\beta_3{}^0 & -\lambda_3\beta_3{}^1 & -\lambda_3\beta_3{}^2 & -\lambda_3\beta_3{}^3 \\ -\lambda_3\beta_3{}'^1 & & & \\ -\lambda_3\beta_3{}'^2 & & L'(\boldsymbol{\beta}_3)^i{}_j & \\ -\lambda_3\beta_3{}'^3 & & & \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$=L'(\boldsymbol{\beta}_3)$$

となることがわかった．$L'^i{}_j$ の部分は，途中の計算を省くが，実際に計算する

と

$$L'(\boldsymbol{\beta}_3)^i{}_k = (R_{12})^i{}_j L(\boldsymbol{\beta}_3)^j{}_k \tag{3.38}$$

の形式にまとめられる．$L(\boldsymbol{\beta}_3)^j{}_k$ は回転を伴わぬ (3.8) の行列の (jk) 要素である．R_{12} は複雑で一般的表式は求めれられない．

ところで，$L'(\boldsymbol{\beta}_3)$ は対称行列でないから，O 系に対する O″ 系の相対速度 $\boldsymbol{\beta}_3$ と，逆に O″ 系に対する O 系の相対速度 $-\boldsymbol{\beta}_3'$ は異なる．ただし，すでに見たように $\boldsymbol{\beta}_3$ と $\boldsymbol{\beta}_3'$ の大きさは等しいから，方向が異なるだけである．その理由は先に述べたように，ローレンツ変換により生ずる空間座標の“回転”効果のためである．そして，$\boldsymbol{\beta}_3$ と $\boldsymbol{\beta}_3'$ とは R_{12} により結ばれていることが次の考察からわかる．ローレンツ変換 L の逆変換の行列は (3.19) により

$$L^{-1} = \eta L^{\mathrm{t}} \eta$$

であるから，$L'(\boldsymbol{\beta}_3)$ の逆行列は

$$L'^{-1}(\boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} \lambda_3\beta_3{}^0 & \lambda_3\beta_3'^1 & \lambda_3\beta_3'^2 & \lambda_3\beta_3'^3 \\ \lambda_3\beta_3{}^1 & & & \\ \lambda_3\beta_3{}^2 & & L'^{\mathrm{t}}(-\boldsymbol{\beta}_3)_j{}^i & \\ \lambda_3\beta_3{}^3 & & & \end{pmatrix}$$

となり，β_3 と β_3' が入れ替って符号が逆になっている．したがって，$-\boldsymbol{\beta}_3'$ が O″ 系から見た O 系の相対速度であることが確かめられる．

実際に

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & (R_{12})^i{}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

として

$$L'(\boldsymbol{\beta}_3) = R_{12} L(\boldsymbol{\beta}_3) \tag{3.39}$$

を計算し，(3.37) の右辺の行列と比較すれば

$$(R_{12})^i{}_j \beta_3{}^j = \beta_3'^i \tag{3.40}$$

となることがわかる．

R_{12} は複雑で一般には求まらないが，$\boldsymbol{\beta}_2$ が無限小の場合，

$$\boldsymbol{\beta}_2 \to d\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_3 - \boldsymbol{\beta}_1$$

と置いて

$$(R_{12})^i{}_j = \delta^i{}_j - \varepsilon_{ijk}\omega^k,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\lambda_1 - 1}{(\boldsymbol{\beta}_1)^2}\boldsymbol{\beta}_1 \times d\boldsymbol{\beta}$$

と表されることがわかっている(C. メラー：『相対性理論』§22 参照).

最後に，ローレンツ変換の積の結合則

$$[L(\boldsymbol{\beta}_1)L(\boldsymbol{\beta}_2)]L(\boldsymbol{\beta}_3) = L(\boldsymbol{\beta}_1)[L(\boldsymbol{\beta}_2)L(\boldsymbol{\beta}_3)]$$

に触れておく．この関係は変換が群をつくるための必要条件である．3つの速度がすべて平行の場合は（例えば x^1 軸に平行）この結合則が満たされることを簡単に確かめることができる．しかし，3つの速度が互いに平行でない場合は，どの基準系で合成則を見るかをきちんと決めておかないと混乱することは，2つの速度の合成則から推測できるであろう．

4章　数学的準備——ベクトル解析

この章では以後の章で必要な数学の準備をする．相対論的力学や電磁気学のマクスウェル方程式などを記述し，それらの変換性を説明するためにミンコフスキー空間のベクトル解析と微分形式の簡単な解説をまとめておく．

4-1　反変および共変ベクトル

ミンコフスキー空間の時空ベクトルを，例によって $\varDelta x^\mu (\mu=0,1,2,3)$ で表す．2つの座標系 x^μ と x'^μ の間のベクトルの変換は，一般に無限小ベクトル $\varDelta x^\mu$ に対し

$$\varDelta x^{\mu\prime} = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu} \varDelta x^\nu \equiv a^\mu{}_\nu \varDelta x^\nu \tag{4.1}$$

と表される．ここで $a^\mu{}_\nu$ は場所ごとに変る x の関数であるが，本書で必要とするローレンツ変換は斉1次線形変換であるから，(3.4) と (3.8) からわかるように $a^\mu{}_\nu$ は x によらず，慣性系 O と O′ の相対速度 $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{\beta}$ のみで決まる定数である（ただし，回転を伴う場合は回転角にも依存する）．すなわち

$$a^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\nu(\boldsymbol{\beta}) \tag{4.2}$$

以後，特にことわらない限り，一般変換は考えず，ローレンツ変換の範囲に止める．それゆえ，$\varDelta x^\mu$ は無限小でなくともよく，有限の長さの場合でも (4.1) は適用される．

次に，スカラー関数 $\phi(x)$ の勾配（ϕ は x^0, x^1, x^2, x^3 の関数だがまとめて x

と記す)

$$y_\mu \equiv \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \tag{4.3}$$

の変換性をみよう．O 系から O′ 系への変換は次のようになる．

$$y'_\mu = \frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}y_\nu \equiv y_\nu b^\nu{}_\mu. \tag{4.4}$$

ただし，上式で，ϕ はスカラーであるから $\phi(x)=\phi(x(x'))=\phi'(x')$ と記した．このように y_μ の変換性は Δx^μ と異なる．

(4.1) と (4.4) から

$$a^\lambda{}_\mu b^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\nu} = \delta^\lambda_\nu, \tag{4.5 a}$$

$$b^\nu{}_\mu a^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\lambda_\nu \tag{4.5 b}$$

なる関係がある．ここに δ^λ_ν はクロネッカーのデルタである ($\lambda=\nu$ のとき 1，$\lambda \neq \nu$ のとき 0) それゆえ，$a^\mu{}_\nu$ と $b^\mu{}_\nu$ とは逆行列の関係にある．よって，(3.19)，(4.2) より

$$b^\mu{}_\nu = (L^{-1})^\mu{}_\nu = (\eta L^{\mathrm{t}}\eta)^\mu{}_\nu \tag{4.6}$$

である．行列表示を用いて，(4.2)，(4.6)，(4.5) を次のように記す．

$$\begin{aligned} &a = L, \qquad b = L^{-1} = \eta L^{\mathrm{t}}\eta, \\ &ab = ba = LL^{-1} = I. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Δx^μ と y_μ とは変換性が異なるので，区別して Δx^μ を反変ベクトル，y_μ を共変ベクトルと呼ぶ．一般に，Δx^μ と同じ (4.1) のような変換をうけるベクトルを反変ベクトル，それと逆の (4.4) と同じ変換をうけるベクトルを共変ベクトルと呼んでいる．

4-2　テンソル

ベクトルより多くの成分を有するテンソルも，その変換性によって反変，共変に区別される．一般に n 階のテンソル $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ が

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\cdots\frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

$$= L^{\mu_1}{}_{\nu_1}L^{\mu_2}{}_{\nu_2}\cdots\cdots L^{\mu_n}{}_{\nu_n}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \tag{4.8}$$

によって変換されるとき，この T を n 階の反変テンソルという．また

$$T'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}}\cdots\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\mu_n}}T_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$$

$$= T_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}L^{-1\nu_1}{}_{\mu_1}L^{-1\nu_2}{}_{\mu_2}\cdots\cdots L^{-1\nu_n}{}_{\mu_n} \tag{4.9}$$

の変換をうける $T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ を n 階の共変テンソルという．また混合した変換性をもつ

$$T'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = L^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots\cdots L^{\mu_m}{}_{\nu_m}T^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}L^{-1\beta_1}{}_{\alpha_1}\cdots\cdots L^{-1\beta_n}{}_{\alpha_n} \tag{4.10}$$

を (m, n) 階の混合テンソルという．スカラーは0階のテンソル，ベクトルは1階のテンソルである．

ミンコフスキー空間のスカラーは，ローレンツ変換に対する不変量である．(2.1) により $\varDelta s$ はローレンツ不変量であるから，計量 $\eta_{\mu\nu}$ を挟んだ (2.1) の形はミンコフスキー空間のスカラー積（内積）とみることができる．そこで

$$\varDelta x_\mu = \eta_{\mu\nu}\varDelta x^\nu \tag{4.11}$$

とおき，下付き添字の $\varDelta x_\mu$ を定義すると，(2.1) は

$$(\varDelta s)^2 = \varDelta x^\mu\eta_{\mu\nu}\varDelta x^\nu = \varDelta x_\mu\varDelta x^\mu = \varDelta x^\mu\varDelta x_\mu \tag{4.12}$$

と表される．$\varDelta s$ の不変性から，$\varDelta x^\mu$ と $\varDelta x_\mu$ とは互いに逆の変換をうけるわけだから，$\varDelta x_\mu$ は共変ベクトルである．すなわち，

$$\varDelta x'_\mu = \varDelta x_\nu b^\nu{}_\mu = \varDelta x_\nu L^{-1\nu}{}_\mu \tag{4.13}$$

したがって，計量 $\eta_{\mu\nu}$ は反変ベクトルを共変ベクトルに変える役をすることがわかった．それゆえ

$$\varDelta x'_\mu\varDelta x'^\mu = \varDelta x_\lambda L^{-1\lambda}{}_\mu L^\mu{}_\nu\varDelta x^\nu = \varDelta x_\lambda\delta^\lambda_\nu\varDelta x^\nu = \varDelta x_\mu\varDelta x^\mu \tag{4.14}$$

このように，$\varDelta x_\mu\varDelta x^\mu$ は確かに不変量である．$\varDelta x^\mu\varDelta x_\mu$ も同様に不変であることが示される．

このように**ミンコフスキー空間の内積**は反変ベクトルと共変ベクトルの積として定義される．一般に，ミンコフスキー空間における2つの任意反変ベクトルを u^μ, v^μ とすると，その内積は

$$\langle u, v\rangle \equiv u^\mu\eta_{\mu\nu}v^\nu = u_\mu v^\mu = u^\mu v_\mu = \langle v, u\rangle \tag{4.15}$$

と定義する．$u_\mu = \eta_{\mu\nu}u^\nu$ は共変ベクトルである．$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ であるから (4.15) のように積の中の同じ添字の両方を同時に上げ下げしてもよい．

反変ベクトルと共変ベクトルの違いは，ミンコフスキー空間では $\eta_{\mu\nu}$ の具体的表式からわかるように，単に空間成分の符号が異なるだけである．

$$(v_0, v_1, v_2, v_3) = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3). \tag{4.16}$$

ベクトルやテンソルに添字を１つ１つ書くのは繁雑なので，なるべく行列表示を用いることにする．そのために，反変ベクトルはこれまで通り縦列，共変ベクトルには横列で表すのが都合がよい．また同じベクトルやテンソルの反変と共変を区別するために，共変ベクトルやテンソルの上にバーを付けることにする．

$$v = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3).$$

これまでに用いられたミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は，(4.12) や (4.15) からわかるように，2つの反変ベクトルの変換行列を打消して，内積を不変に保つ量であるから2階の共変テンソルである．それゆえ，$\eta_{\mu\nu}$ の行列表示を $\bar{\eta}$ と記すことにする．

すると，(4.1)，(4.11) および (4.13) はそれぞれ次のように略記できる．

$$\begin{aligned} \varDelta x' &= a\varDelta x = L\varDelta x, \\ \varDelta \bar{x} &= (\bar{\eta}\varDelta x)^{\mathrm{t}}, \\ \varDelta \bar{x}' &= \varDelta \bar{x} b = \varDelta \bar{x} L^{-1}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

a, b は成分が $a^{\mu}{}_{\nu}, b^{\mu}{}_{\nu}$ の行列である．(4.15) は (4.17) を適用して次のように行列表示される．

$$\langle u, v\rangle = \bar{u}v = u^{\mathrm{t}}\bar{\eta}^{\mathrm{t}}v = u^{\mathrm{t}}\bar{\eta}v = u^{\mathrm{t}}\bar{v}^{\mathrm{t}} = \bar{v}u. \tag{4.18}$$

$u=v$ の場合，$\sqrt{\bar{u}u}$ をもってベクトル u の長さ（世界距離）とする．

計量テンソル $\bar{\eta}$ は，実はローレンツ変換に対して不変な定数テンソルであることが，ローレンツ変換の定義式 (3.5) からわかる．

$$L^{\mathrm{t}}\bar{\eta}L = \bar{\eta} \quad \text{から} \quad \bar{\eta} = L^{-1\mathrm{t}}\bar{\eta}L^{-1} \tag{4.19}$$

を得るが，これを成分で表すと

$$\eta_{\mu\nu} = (L^{-1\mathrm{t}})_{\mu}{}^{\alpha}\eta_{\alpha\beta}L^{-1\beta}{}_{\nu} = \eta_{\alpha\beta}L^{-1\alpha}{}_{\mu}L^{-1\beta}{}_{\nu} = \eta'_{\mu\nu} \tag{4.20}$$

となるからである．最後の等式は共変テンソルの変換性の定義によった．

次に，共変性の計量 $\eta_{\mu\nu}$ に対して，その逆行列，反変性の計量 $\eta^{\mu\nu}$ を導入しておく．

$$\eta^{\lambda\mu}\eta_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}, \quad \eta_{\lambda\mu}\eta^{\mu\nu} = \delta^{\nu}_{\lambda}. \tag{4.21}$$

この $\eta^{\mu\nu}$ は容易にわかるように $\eta_{\mu\nu}$ と全く同じ成分をもつ行列である

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

この反変計量テンソルは，下付き添字を上付き添字に変える，すなわち，共変ベクトルを反変ベクトルに変える役をする．

$$\eta^{\mu\nu}v_{\nu} = \eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}v^{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}v^{\rho} = v^{\mu} \tag{4.23}$$

このように $\eta^{\mu\nu}$ は v_{ν} を反変ベクトル v^{μ} に変える．これを行列表示すると

$$v = (\bar{v}\eta)^{\mathrm{t}} \tag{4.24}$$

となる．

ベクトルばかりでなく，テンソル成分についても，$\eta_{\mu\nu}$ を乗じて和をとれば，その反変成分を共変成分へ，また $\eta^{\mu\nu}$ は共変成分を反変成分に変える．

この節の最後に，よく使われるクローネッカの記号 δ^{μ}_{ν} と，レヴィ・チヴィタの完全反対称テンソルの変換性に言及しておく．

まず，δ^{μ}_{ν}は1階の反変1階の共変混合テンソルで，しかもローレンツ変換の下で不変である．実際に (4.21) において，$\eta^{\lambda\mu}$ と $\eta_{\mu\nu}$ の μ は縮約して内積になっているから，λ と ν 成分のみ変換をうける．よって δ^{λ}_{ν} は λ について反変，ν について共変成分を有する混合テンソルである．その変換を具体的にみると (4.10) により

$$\delta'^{\mu}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}L^{-1\beta}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{-1\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{4.25}$$

となるから変換前と後は等しい．よって不変混合テンソルである．

次に，完全反対称4階共変擬テンソルを導入する．

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} +1 & (\lambda\mu\nu\rho)\ \text{が (0123) からの偶置換の場合} \\ -1 & \qquad〃 \qquad\qquad \text{奇置換} \quad 〃 \\ \ \ 0 & (\lambda\mu\nu\rho)\ \text{に同じものがある場合} \end{cases} \tag{4.26 a}$$

すなわち，$\lambda\mu\nu\rho$ はすべて異なり，どの2つの添字を入れ替えても符号が変る．

同様に上付き添字の完全反対称4階共変擬テンソルを定義する．

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}=\begin{cases}-1 & (\lambda\mu\nu\rho)\ \text{が}\ (0123)\ \text{から偶置換の場合} \\ +1 & \quad〃 \qquad\qquad \text{奇置換}\ 〃 \\ \ \ 0 & (\lambda\mu\nu\rho)\ \text{に同じものがある場合}\end{cases} \tag{4.26 b}$$

$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ は $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ と符号が逆で，$\epsilon_{0123}=-\epsilon^{0123}=1$ となっていることに注意しよう．その理由は $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ の添字を $\eta^{\lambda\alpha}$ を用いて上げるとき，3つの空間成分の符号が変るからこのように定義するのがよい．

$\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ の変換性：

$$\epsilon'_{\lambda\mu\nu\rho}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}L^{-1\alpha}{}_{\lambda}L^{-1\beta}{}_{\mu}L^{-1\gamma}{}_{\nu}L^{-1\delta}{}_{\rho}=\det(L^{-1})\,\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}=\pm\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \tag{4.27 a}$$

この式の変形で，行列式 $\det(L^{-1})$ はどの行または列を入れ替えても符号が変り，かつ完全反対称な $L^{-1\mu}{}_{\lambda}$ の同次式であるから，上の第2式は行列式の定義に他ならないことを用いた．

したがって，ローレンツ変換が，時間あるいは空間反転を含まない場合 ($\det(L)=1$)，ϵ は不変であり，L が反転を含む場合はその符号を変える．これが“擬テンソル”と呼ぶ理由である．

反変 $\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ の変換性は (4.27 a) の L^{-1} の代りに L を用いればよいので，共変 $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ と同様の性質を有する．

$$\epsilon'^{\lambda\mu\nu\rho}=\det(L)\,\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}=\pm\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \tag{4.27 b}$$

ちなみに，3次元空間の場合も同様に3階完全反対称擬テンソル ϵ^{ijk} と ϵ_{ijk} を定義することができる．この場合は，(4.26 a, b) で0成分を落せばよい*)．

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & (ijk)\ \text{が}\ (123)\ \text{の偶置換の場合} \\ -1 & \quad〃 \qquad\qquad \text{奇置換}\ 〃 \\ \ \ 0 & (ijk)\ \text{に同じものがある場合}\end{cases} \tag{4.26 c}$$

$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon^{ijk},\quad \epsilon_{123}=-\epsilon^{123}=1. \tag{4.26 d}$$

*) 3次元ユークリッド空間では，計量をすべて $+1$ とし，反変，共変の区別がないので，通常 $\epsilon_{ijk}=\epsilon^{ijk}$ とするが，ここでは (4.26) の特殊な場合として扱うのでこのように定義する．なお，(4.26) と逆に $\epsilon^{0123}=-\epsilon_{0123}=+1$ と定義することもできる．

4-3　双対空間

前節までは通常用いられている共変，反変ベクトルの定義と変換性の表し方を用いたが，本節では，やや抽象的な表現形式として，双対空間の概念を用いたベクトルやテンソルの定義を行う．この記述法は，(外) 微分形式への橋渡しの役をする．本節でも対象とする空間はミンコフスキー空間であるが，この定式化は一般の n 次元空間（多様体）に対して適用しうる．

a. 双対基底

ミンコフスキー空間の反変ベクトル v は1組の基底ベクトル $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ を与えると一義的に表される．

$$v = v^\mu e_\mu \tag{4.28}$$

v^μ を基底 $\{e_\mu\}$ ($\mu=0\sim3$) に関する v の反変成分という．4つの e_μ はそれぞれ4次元単位ベクトルで，互いに独立であれば任意の方向をとってよい．しかし，簡単で便利な基底として，

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

をとることが多い．この e_μ を正規直交基底という．

ここで，ミンコフスキー空間の内積に関して正規直交基底 $\{e_\mu\}$ と直交する正規基底 $\{e^\mu\}$ を考える．すなわち，内積を行列表示で (4.18) のように表すと

$$\langle e^\mu, e_\nu \rangle = \bar{e}^\mu e_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{4.30}$$

このような $\{e^\mu\}$ を $\{e_\mu\}$ の双対基底という．

この e^μ と (4.28) との内積をとると

$$\langle e^\mu, v \rangle = \bar{e}^\mu \cdot v^\nu e_\nu = v^\nu (\bar{e}^\mu e_\nu) = v^\nu \delta^\mu_\nu = v^\mu \tag{4.31}$$

を得る．それゆえ，e^μ との内積 $\langle e^\mu, \quad \rangle$ はミンコフスキー空間のベクトルの反変成分を取り出す射影演算子である．すなわち，$\langle e^\mu, \quad \rangle$ はミンコフスキーベクトル空間 M_v から実数空間 R への写像と見ることができ，この写像は汎

関数とみなせる．そこでこの (4.31) の写像を $e^\mu(v)$ と記すことにする．

$$e^\mu(v) = \langle e^\mu, v\rangle = \bar{e}^\mu e_\nu v^\nu = \delta^\mu_\nu v^\nu = v^\mu \tag{4.32}$$

この写像 (汎関数) の全体は次に示すように，線形ベクトル空間をつくる［実は $\{e^\mu\}$ は共変ベクトルの基底なのである (後述)］．

e^μ の1次結合をとり，

$$w = w_\mu e^\mu \tag{4.33}$$

を考える．この (4.33) も実数の組 w_μ から w への汎関数写像とみることができる．w の全体は次の意味で，この汎関数写像に関して線形ベクトル空間をつくる．実際に，M_v の任意ベクトル v_1, v_2 と任意の実数 a_1, a_2 に対して，内積の定義から，

$$\begin{aligned} w(a_1v_1+a_2v_2) &= \langle w, a_1v_1+a_2v_2\rangle = a_1\langle w, v_1\rangle + a_2\langle w, v_2\rangle \\ &= a_1w(v_1)+a_2w(v_2) \end{aligned}$$

また，2つの汎関数 w_1, w_2 に対して

$$\begin{aligned} (w_1+w_2)(v) &= \langle w_1+w_2, v\rangle = \langle w_1, v\rangle + \langle w_2, v\rangle \\ &= w_1(v)+w_2(v) \end{aligned}$$

$$(aw)(v) = \langle aw, v\rangle = a\langle w, v\rangle = aw(v).$$

したがって，$a_1w_1+a_2w_2$ もこの汎関数となり，それらの全体はベクトル空間をつくる．これを $M_v{}^*$ と表し，M_v の**双対空間** (あるいは共役空間) という．

すると**双対基底** $\{e_\mu\}$ と $\{e^\mu\}$ はそれぞれ M_v と $M_v{}^*$ の正規直交基底である．(4.29) と (4.30) から e^μ は1次独立で，次のように表してよい．

$$e^0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad e^1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{4.34}$$

したがって，$M_v{}^*$ の次元も M_v と同じ4である．

b. 反変性と共変性

ベクトル空間 M_v の要素と汎関数ベクトル空間 $M_v{}^*$ の要素とは一般には区別される (ただしユークリッド空間では M_v と $M_v{}^*$ とは同一視されうる)．$M_v{}^*$ の要素が共変ベクトルであることは双対空間の導入法から読みとれるで

あろう．事実，$M_v, M_v{}^*$ の要素をそれぞれ

$$v = v^\mu e_\mu, \quad w = w_\mu e^\mu \tag{4.35}$$

とすると

$$\begin{aligned} w(v) &= w_\mu e^\mu (v^\nu e_\nu) = w_\mu v^\nu e^\mu (e_\nu) \\ &= w_\mu v^\nu \bar{e}^\mu e_\nu = w_\mu v^\nu \delta^\mu_\nu = w_\mu v^\mu \\ &= \bar{w} v \end{aligned} \tag{4.36}$$

のように，w と v の内積を得るからである．

実際に，v と w の変換性を基底 $\{e_\mu\}$ の変換性と関連づけてみよう．いま M_v の2組の正規直交基底 $\{e_\mu\}$ と $\{e'_\mu\}$ を考え，それらが変換により

$$e'_\mu = e_\nu a^\nu{}_\mu \tag{4.37}$$

によって結ばれているとする．$a^\nu{}_\mu$ はその変換行列の成分である．また，v がそれぞれの基底により

$$v = v^\mu e_\mu, \quad v = v'^\mu e'_\mu \tag{4.38}$$

と表されているとすると，(4.37) と (4.38) の第2式から

$$v = v'^\mu e_\nu a^\nu{}_\mu$$

これを (4.38) の第1式と比較すると

$$v^\nu = a^\nu{}_\mu v'^\mu \tag{4.39}$$

を得る．この式に $a^\nu{}_\mu$ の逆行列 $b^\lambda{}_\nu$ を乗ずると

$$v'^\mu = b^\mu{}_\nu v^\nu \tag{4.40}$$

となる．このように v の変換性は基底 $\{e_\mu\}$ と異なり，逆変換をうける．

他方，$M_v{}^*$ の要素 w を2組の双対基底 $\{e^\mu\}$ と $\{e'^\mu\}$ で表し

$$w = w_\mu e^\mu, \quad w = w'_\mu e'^\mu$$

とする．この第1式と e_μ との内積をとると

$$w(e_\mu) = w_\nu e^\nu (e_\mu) = w_\nu \delta^\nu_\mu = w_\mu \tag{4.41}$$

それゆえ，第2式と e'_μ の内積は $e'^\nu e'_\mu = \delta^\nu_\mu$ と (4.37) を用いて

$$w'_\mu = w(e'_\mu) = w(e_\nu a^\nu{}_\mu) = w(e_\nu) a^\nu{}_\mu = w_\nu a^\nu{}_\mu \tag{4.42}$$

この結果と (4.37) を比較すれば，w は基底 e_μ と同じ変換性をもつことがわかる．これが，w を共変ベクトルと呼ぶ理由である．v は w と逆の変換をうけるから反変ベクトルである*) (4-1節と本節では a と b が入れ替っていることに注意)．

c. テンソル

反変，共変ベクトルを拡張して，M_v と $M_v{}^*$ におけるテンソルを定義しよう．M_v の中の2つの反変ベクトル u, v の対に実数を対応させる写像 $f(u, v)$ を考える．f が u についても，v についても線形写像であるとき，すなわち

$$\begin{aligned} f(a_1u_1+a_2u_2, u) &= a_1f(u_1, v)+a_2f(u_2, v), \\ f(u, a_1v_1+a_2v_2) &= a_1f(u, v_1)+a_2f(u, v_2) \end{aligned} \tag{4.43}$$

であるとき，f を M_v 上の双線形汎関数，または双1次形式という．

この双1次形式 f が2階共変テンソルを定義するのである．いま反変ベクトル v_1, v_2 を

$$v_1 = v_1{}^\mu e_\mu, \quad v_2 = v_2{}^\mu e_\mu$$

とおくと，(4.43) の線形性により

$$f(v_1, v_2) = v_1{}^\mu v_2{}^\nu f(e_\mu, e_\nu) \equiv v_1{}^\mu v_2{}^\nu T_{\mu\nu} \tag{4.44}$$

と $T_{\mu\nu}$ を定義する．するとこの $T_{\mu\nu}$ が2階共変テンソル f の成分という訳である．

特に，f が2つの共変ベクトル w_1, w_2 の直積になっている場合には

$$f(v_1, v_2) = w_1 \otimes w_2(v_1, v_2) = w_1(v_1)\cdot w_2(v_2) \tag{4.45}$$

と表される．w を $M_v{}^*$ の基底を用いて書くと，$w=w_\mu e^\mu$ であるから，上式は

$$f(v_1, v_2) = v_1{}^\mu v_2{}^\nu w_1(e_\mu) w_2(e_\nu) = v_1{}^\mu v_2{}^\nu (w_{1\mu} w_{2\nu}). \tag{4.46}$$

よって，この場合は，テンソル成分は2つの共変ベクトルのテンソル積 $w_{1\mu}w_{2\nu}$ となる．

$$\therefore \quad f \longrightarrow T_{\mu\nu} = w_{1\mu} w_{2\nu}. \tag{4.47}$$

この例からわかるように，双1次形式の w_1 と w_2 の積の順序が決まっており，入れ替えると結果が異なる．また，双線形汎関数 f は，共変ベクトルの定義における (4.33) の w の拡張になっていることが理解されるであろう．

反変テンソルも同様に，$M_v{}^*$ の共変ベクトル w_1, w_2 の対に実数を対応させ

---

*) 反変と共変の区別は計量テンソルが単位行列と異なる場合には常に必要である．すなわち，ユークリッド空間で正規直交基底を選べば計量テンソルは単位行列（符号の不定性を除く）となるから，反変と共変の区別はなく，$\boldsymbol{e}^i$ と $\boldsymbol{e}_i$ は同一視できる．しかし，球面座標や斜交座標では区別は必要である．

る双線形汎関数，または双1次形式 g を考え，

$$g(w_1, w_2) = w_{1\mu}w_{2\nu}g(e^\mu, e^\nu) \equiv w_{1\mu}w_{2\nu}T^{\mu\nu} \tag{4.48}$$

によって，2階反変テンソルを定義することができる．$T^{\mu\nu}$ を反変テンソル g の成分という．

3階以上のテンソルも，3つ以上のベクトルの組に対する線形汎関数写像を用いて同様に定義することができるが省略する．混合テンソルは，反変ベクトルと共変ベクトルの対に対する線形汎関数写像を用いればよい．

この後，外微分形式において，反対称テンソル（または交代テンソル）が現われる．反対称2階テンソルは，反対称双1次形式

$$f(v_1, v_2) = -f(v_2, v_1), \quad g(w_1, w_2) = -g(w_2, w_1) \tag{4.49}$$

によって与えられるテンソルである．それらの成分は

$$f: T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}, \quad g: T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \tag{4.50}$$

ここで強調しておきたいことは，本節のように内積による線形写像を抽象化し，**線形汎関数を用いて，ベクトルやテンソルを定義する方法は，座標系によらない**ということである．M_v や $M_v{}^*$ の正規直交基底 $\{e_\mu\}$, $\{e^\mu\}$ を用いて表現すれば，その基底のとり方によって決まる座標系に依存した成分 $v^\mu, w_\mu, T_{\mu\nu}$ などが得られるが，そのような座標表示をしないで済ませるところに，この方法の特徴がある．

4-4 余接ベクトルと接ベクトル

いまミンコフスキー空間 M の1点Pをとり，Pの座標を x^μ とし，P点でのスカラー関数を $\varphi(\mathrm{P})=\varphi(x)$ と表す．ベクトル空間 M_v の任意のベクトル v に対して，P点における微分

$$d\varphi_{\mathrm{P}}(v) \equiv \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+vt)-\varphi(x)}{t} \tag{4.51}$$

を考える．Pにおける M_v の基底 $(e_\mu)_{\mathrm{P}}$ を用いて，$v=v^\mu(e_\mu)_{\mathrm{P}}$ と表すと，上式は

$$d\varphi_{\mathrm{P}}(v) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} v^\mu = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} (e^\mu)_{\mathrm{P}}(v) \tag{4.52}$$

となる．この $d\varphi_{\mathrm{P}}(v)$ は v 方向への φ の微分である．(4.52) では (4.32) を用いた．$\{(e^{\mu})_{\mathrm{P}}\}$ は $\{(e_{\mu})_{\mathrm{P}}\}$ の双対基底である．ベクトル v は任意であるから，P 点における写像

$$d\varphi_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}}\right)_{\mathrm{P}}(e^{\mu})_{\mathrm{P}} \tag{4.53}$$

を得る．したがって，$d\varphi_{\mathrm{P}}$ は共変ベクトルであり，その成分が $(\partial\varphi/\partial x^{\mu})_{\mathrm{P}}$ ということである．特にスカラー関数 φ として，x^{μ} をとると $(\varphi:\mathrm{P}\rightarrow x^{\mu})$，上式から

$$(dx^{\mu})_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)_{\mathrm{P}}(e^{\nu})_{\mathrm{P}} = \delta^{\mu}_{\nu}(e^{\nu})_{\mathrm{P}} = (e^{\mu})_{\mathrm{P}} \tag{4.54}$$

を得る．各 $\mu=0,1,2,3$ に対して，これが成り立つので，$(dx^{\mu})_{\mathrm{P}}$ は P における双対基底とみなせる．

空間の各点に，(4.53) のように 1 つずつの共変ベクトルを対応させる写像を考え，それを滑らかに繋いだ $d\varphi(x)$ を共変ベクトル場，または余接ベクトル場といい，(4.54) を用いて

$$d\varphi(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu} \tag{4.55}$$

で表す．そして，$d\varphi$ を φ の(外)微分という．

(4.55) の余接ベクトルはスカラー関数 φ の勾配という特別のベクトル場であるが一般に，dx^{μ} を基底とするベクトル空間が考えられ，その空間の任意の余接ベクトル場は

$$w = w_{\mu}dx^{\mu} \tag{4.56}$$

と表される．w のつくるベクトル空間を M_v の**余接空間**といい，$T^*(M)$ と記す．

次に余接ベクトルに双対なベクトル場を導入する．いまミンコフスキー空間 M の 1 点 P を通る曲線を考えよう．その曲線への接ベクトルを表すために，1 パラメータ t を用いて曲線上の座標を $x^{\mu}=\phi^{\mu}(t)$ とする．$t=0$ で P を通るとして，$(x^{\mu})_{\mathrm{P}}=\phi^{\mu}(0)$ と決める．そして，P を含む領域で定義されたスカラー関数 $f(x)=f(\phi(t))$ を考える．

P 点 $t=0$ における f の微分は

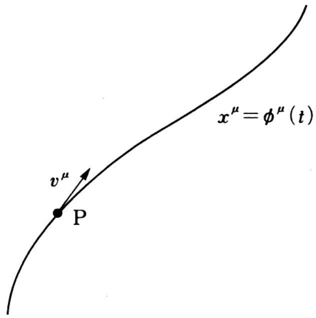


図 4.1　接ベクトル

$$\frac{d}{dt}f(\phi(t))\bigg|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{d\phi^\mu}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{d\phi^\mu(0)}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} \tag{4.57}$$

となる．ここで，$v^\mu\equiv d\phi^\mu(0)/dt$ とおくと，(v^0, v^1, v^2, v^3) はこの曲線の点 P における接ベクトルである．1 つの $\phi^\mu(t)$ に 1 つの曲線が対応するが，独立な接ベクトルは M では 4 個存在する．したがって，独立な関数 $\phi^\mu(\mu=0\sim3)$ を選べば充分である．

$$\frac{d}{dt}f\bigg|_{\mathrm{P}}=v^\mu\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}}. \tag{4.58}$$

点 P に 1 つの座標系を導入し，その座標系の基底を e_μ とする接ベクトルの空間 T_{P} を考え，上で定めたベクトル v^μ に T_{P} のベクトル $v=v^\mu e_\mu$ を対応させる．この 4 次元ベクトル空間 T_{P} を P 点での**接空間**といい，$T_{\mathrm{P}}(M)$ と記す．ユークリッド空間やミンコフスキー空間では，T_{P} は元の空間と同一視できる．したがって，$T_{\mathrm{P}}(M)$ は M_v である（リーマン空間のように曲った空間では両者は異なる）．

(4.58) において，関数 f は任意であるから，

$$v\longrightarrow v^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} \quad \text{すなわち} \quad e_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} \tag{4.59}$$

とみなせる．すると，$(\partial/\partial x^\mu)_{\mathrm{P}}$ を基底とするベクトル空間 $T_{\mathrm{P}}(M)$ の要素を X_{P} とすると X_{P} は一義的に決まり

$$X_{\mathrm{P}}=v^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\mathrm{P}} \tag{4.60}$$

と表される．X_{P} は点 P における v^μ 方向への微分作用素であり，P における

(接)ベクトル場と呼ばれる．

これまで，点Pを固定して，P点での接空間 T_P とベクトル場 X_P を考えたが，M の各点に，このような接空間を考え，接ベクトルが滑らかに繋がるようにすると，M の接空間 $T(M)$ とその上のベクトル場

$$X = v^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{4.61}$$

が定義される．

以上の構成から明らかなように，**余接空間 $T^*(M)$ は接空間 $T(M)$ の双対空間である．そして，dx^μ と $\partial/\partial x^\mu$ とはそれぞれのベクトル空間の基底**となっている．そこで，内積を（4.30）に対応して

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right\rangle = dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu \tag{4.62}$$

と定義する．

4-5　(外) 微分形式

この節では（外）微分形式の初等的な解説を行う．外微分の有意義な性質を理解するために，3次元ユークリッド空間で外微分を考えよう．

いま1粒子が力 $\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, F_3)$ の作用のもとで，空間内の閉曲線 C に沿って1周したとする．その間に力 $\boldsymbol{F}$ のした仕事 W は（$x=x^1, y=x^2, z=x^3$ と記す）

$$W = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x} = \oint_C F_i dx^i \tag{4.63}$$

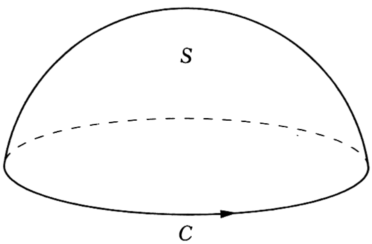


図4.2　ストークスの定理

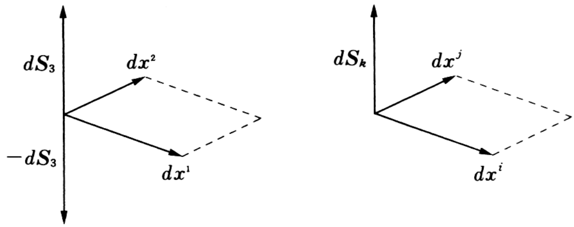


図 4.3 向きづけられた面積要素

である．これをストークスの定理を用いて，C を境界とする曲面 S 上の積分で表すと

$$
\begin{aligned}
W &= \int_s (\nabla\times \boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \int_s \left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x^2}-\frac{\partial F_2}{\partial x^3}\right)dx^2dx^3+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x^3}-\frac{\partial F_3}{\partial x^1}\right)dx^3dx^1 \right.\\
&\quad \left. +\left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1}-\frac{\partial F_1}{\partial x^2}\right)dx^1dx^2\right\} \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

となる．

面には表と裏があるから，面積要素 dx^1dx^2 などには向きを指定すべきである．そこで（図 4.3）に示すように，dx^1 から dx^2 に回る右ネジの進む方向を正に，反対方向を負と定める．

すると，面積要素 dS_3 は dx^1 と dx^2 の外積により

$$dS_3 = dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$$

と表される．ここで記号 $\wedge$ は外積を表す．一般的に，i, j, k をサイクリックにとって

$$dS_k = dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}dx^i \wedge dx^j \qquad (4.65)$$

と定義する（右辺の 1/2 は i, j の二重和のためである）．このように，dx^i の外積をつくると，dx^i の積に関して反対称性をもつので，同じ微分の積は 0 である．

$$dx^i \wedge dx^i = 0 \qquad (i \text{ の和はとらない}) \qquad (4.66)$$

この性質を用いると，(4.64) の被積分項は次のように変形できる．

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial x^2}-\frac{\partial F_2}{\partial x^3}\right)dx^2\wedge dx^3+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x^3}-\frac{\partial F_3}{\partial x^1}\right)dx^3\wedge dx^1+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1}-\frac{\partial F_1}{\partial x^2}\right)dx^1\wedge dx^2$$

$$=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial F_1}{\partial x^3}dx^3\right)\wedge dx^1+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial F_2}{\partial x^3}dx^3\right)\wedge dx^2$$

$$+\left(\frac{\partial F_3}{dx^1}dx^1+\frac{\partial F_3}{\partial x^2}dx^2\right)\wedge dx^3$$

$$=dF_1\wedge dx^1+dF_2\wedge dx^2+dF_3\wedge dx^3=dF_i\wedge dx^i \tag{4.67}$$

ここに

$$dF_i=\frac{\partial F_i}{\partial x^j}dx^j=\frac{\partial F_i}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial F_i}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial F_i}{\partial x^3}dx^3. \tag{4.68}$$

(4.67) では $(\partial F_i/\partial x^1)\ dx^1\wedge dx^1=0$ などを用いた.

(4.63) の $F_i dx^i$ や, (4.68) のように, 微分が1つ掛ったものの1次結合を1形式, (4.67) のように微分が2つ掛ったものの1次結合を2形式という. そして, 上の操作のように, 1形式

$$\omega=F_i dx^i \tag{4.69}$$

から, $d^2x^i=0$ や積の反対称を用いて2形式

$$d\omega=dF_i\wedge dx^i=\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx^j\wedge dx^i=-\frac{\partial F_i}{\partial x^j}dx^i\wedge dx^j \tag{4.70}$$

を導く演算を外微分という.

積分表式で, 通常の (4.64) と微分形式 (4.67) を積分したものは実質的には同じであるが, 次のような違いがある. 後者では面積要素 dS_i に向きが定められているので, 積分領域 (あるいは境界) も向き付けられる. それゆえ, (4.64) では曲線 C を通常反時計回りに指定するが, (4.67) を使えば, その指定は不要である.

同様に2形式と3形式の関係を見よう. まず, 次の2形式を考える.

$$\rho=G^1dx^2\wedge dx^3+G^2dx^3\wedge dx^1+G^3dx^1\wedge dx^2. \tag{4.71}$$

G^i は x の関数である. 3次元空間内に領域 V をとり, その表面を S とすると, ガウスの定理により, 次の積分等式を得る.

$$\int_S \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{G}dV$$

すなわち

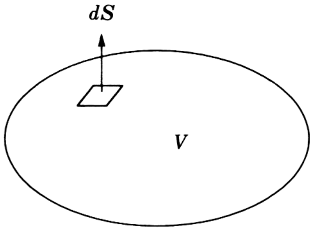


図 4.4　ガウスの定理

$$\int_S (G^1 dx^2 dx^3 + G^2 dx^3 dx^1 + G^3 dx^1 dx^2)$$
$$= \int_V \left(\frac{\partial G^1}{\partial x^1} + \frac{\partial G^2}{\partial x^2} + \frac{\partial G^3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3 \tag{4.72}$$

前のように積分記号を除いた右辺の被積分項を

$$\frac{\partial G^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{4.73}$$

と書く．これは微分の 3 つの積であるから 3 形式という．3 形式は一般に

$$A dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

の形で与られる．

(4.73) の右辺は $dx^i \wedge dx^i = 0$ を用いると以下のように変形される．

$$\left(\frac{\partial G^1}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial G^1}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial G^1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$+ \left(\frac{\partial G^2}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial G^2}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial G^2}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3 \wedge dx^1$$
$$+ \left(\frac{\partial G^3}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial G^3}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial G^3}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 \wedge dx^2$$
$$= dG^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dG^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + dG^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \tag{4.74}$$

この式を (4.71) と比較すれば ρ の外微分 $d\rho$ であることがわかる．

したがって，ガウスの定理 (4.72) は，2 形式 (4.71) と 3 形式 (4.74) を用いて次のように表される．

$$\int_S \rho = \int_V d\rho. \tag{4.75 a}$$

上式でも，面要素の向きを考えて，

$$dx^1 dx^2 \longrightarrow dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1 = dS_3$$

などとし，体積要素も右手系の積を正として

$$dx^1dx^2dx^3 \longrightarrow dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = \cdots\cdots = dV$$

と定める．

ストークスの定理 (4.63)，(4.64) も (4.69)，(4.70) によって

$$\int_C \omega = \int_S d\omega \tag{4.75 b}$$

と表される．

(4.75 a) と (4.75 b) をみると，同じ形をしているから，一括して統一的に表すことができることに気づく．すなわち，一般的な微分形式*) ω を用いて

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega. \tag{4.76}$$

ここに ω は1形式または2形式で，Σ は3次元空間の領域を，$\partial\Sigma$ は Σ の境界を表す．ストークスの定理では ω は1形式 (4.69) であり，Σ は曲面 S, $\partial\Sigma$ はその境界の閉曲線 C である．ガウスの定理では ω は2形式 (4.71) であり，Σ は3次元領域 V，そして $\partial\Sigma$ は V を囲む曲面 S である．

3次元空間では，dx^i の4つの積には必ず同じものが現われるから (4.66) により0となる．よって4形式は存在しない．一般に n 次元空間での外微分形式は n 形式まで存在するので，(4.76) の積分公式は ω が1形式から $(n-1)$ 形式まで考えうる．4次元ミンコフスキー空間での積分公式は第6章で電磁場の話と一緒に行う．

このように，微分形式は大変便利な数学の体系である．それゆえ，その性質をもう少し詳しく調べることにしよう．

4-6　微分形式の一般的性質

これまでに導入した微分の外積や微分形式の性質を満たし，かつ矛盾のない体系をつくるために次の演算規則を定める．

すでに4-4節で示したように，1形式

$$\omega = a_i(x)\,dx^i$$

---

*) n 形式 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ をまとめて微分形式という．

は dx^i を基底とする余接空間 T^* のベクトルであり，和とスカラー倍を次のように定義する．2つの1形式 ω と $\rho=b_i(x)dx^i$ に対して

$$\alpha\omega+\beta\rho=(\alpha a_i+\beta b_i)dx^i \quad \text{（線形性）} \tag{4.77}$$

ここに α, β は x の関数である．

また dx^i の外積に関しては，次のように定義する．

I） $dx^i \wedge dx^j=-dx^j \wedge dx^i$

$dx^i \wedge dx^i=0$ （和はとらない）

II） $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k=(dx^i \wedge dx^j) \wedge dx^k=dx^i \wedge (dx^j \wedge dx^k)$

III） $\alpha dx^i \wedge dx^j=(\alpha dx^i) \wedge dx^j=dx^i \wedge (\alpha dx^j)$,

IV） $(\alpha dx^i+\beta dx^j) \wedge dx^k=\alpha dx^i \wedge dx^k+\beta dx^j \wedge dx^k$.

この外積の性質を用いて

$$\begin{aligned}\omega \wedge \rho &= a_i b_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}(a_i b_j-a_j b_i)dx^i \wedge dx^j=-\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}a_i b_j dS_k\end{aligned} \tag{4.78}$$

を得る．右辺の（ ）の中はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積の成分であるから，1形式の2つの積はベクトル積に対応する．ϵ^{ijk} は（4.26 d）に与えた3次元完全反対称テンソルである．

さらに，1形式と2形式の積もこれらの公式を用いて計算できる．たとえば2形式

$$\begin{aligned}\lambda &= b^1 dx^2 \wedge dx^3+b^2 dx^3 \wedge dx^1+b^3 dx^1 \wedge dx^2 \\ &= b^i dS_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}b^i dx^j \wedge dx^k\end{aligned} \tag{4.79}$$

をとろう．ω と λ の外積は具体的に計算すればわかるように

$$\omega \wedge \lambda=a_i dx^i \wedge \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}b^j dx^k \wedge dx^l=(a_i b^i)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{4.80}$$

となる（i, k, l はすべて異なるもののみ0でないから，$i=j$ のところだけ残る）．右辺の係数は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のスカラー積に等しい．

微分形式の外微分については次のように定義する． こうすれば，上記の性質（I）～（IV）と整合的である．

（i） n 形式 ρ と ω に対して，$d(\rho+\omega)=d\rho+d\omega$

(ii) n 形式 ρ と m 形式 ω に対して，$d(\rho\wedge\omega)=d\rho\wedge\omega+(-1)^n\rho\wedge d\omega$

(iii) 任意の微分形式に対して，$d^2\omega=0$,　$\therefore\ d^2=0$.

(iv) スカラー関数は0形式とし，

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu.$$

(ii)は外微分も $(-1)^n$ を除いて積の微分と同様ライプニッツの形式になることを示している．

(iii)の証明は，関数 $f(x)$ について行えば十分である．なぜならば，$\omega=f_{\mu\nu\cdots}dx^\mu\wedge dx^\nu$ とすると，$f_{\mu\nu\cdots}$ について成立すれば ω について成立するからである．

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\longrightarrow d^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j dx^i}dx^j\wedge dx^i.$$

この第2式で，$\partial^2 f/\partial x^j\partial x^i$ は i,j につき対称，$dx^j\wedge dx^i$ は反対称であるから，i,j につき和をとったものは0である．よって，任意の f に対して

$$d^2f=0. \tag{4.81}$$

これより直ちに $d^2x^i=0$ を得るから，n 形式に対しても $d^2=0$ は明らかである．

n 形式を外微分すると $(n+1)$ 形式となる．たとえば，1形式 $\omega=a_idx^i$ を外微分すると，0形式 a_i の外微分 da_i は1形式なので

$$d\omega=da_i\wedge dx^i+a_id^2x^i=da_i\wedge dx^i=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx^j\wedge dx^i.$$

次に，n 形式は n-ベクトル空間のベクトルになっていることに言及しておく．一般に N 次元空間 V の基底 $e_i(i=1\sim N)$ に対し，1形式

$$\omega_1=a_idx^i$$

は余接ベクトル空間 $T^*(V)$ をつくり，dx^i はこの N 次元ベクトル空間の基底になっていることはすでに述べた．このベクトル空間を1-ベクトル空間といい，$\wedge^1(V)$ と記す．次に2形式

$$\omega_2=a_{ij}dx_i\wedge dx^j$$

も2-ベクトル空間 $\wedge^2(V)$ をつくり，$dx^i\wedge dx^j$ がその基底である．$\wedge^2(V)$ の次元は $N(N-1)/2$ である．同様に，$dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n}$ は n-ベクトル空間 $\wedge^n(V)$ の基底であり，その次元数は ${}_NC_n$ である．N-ベクトル空間 $\wedge^N(V)$

は 1 次元で，その基底は $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^N$ である．

この事実から，dx^i の双対基底 $*dx^i$ を構成することができる．$*dx^i$ は $\wedge^{N-1}(V)$ の基底をつくり，$*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n})$ は $\wedge^{N-n}(V)$ の基底をつくる．この双対基底をつくる $*$ 印作用素については 6-4 節で詳しく述べる．

次に ***n*-ベクトル空間の内積**に触れておく．$\wedge^1(V)$ における内積は，$\wedge^1(V)$ $(T^*(V))$ の ω_1 と双対空間 $T(V)$ のベクトル場 (4.61) の X との内積である．(4.62) により

$$\omega_1(X) = a_i dx^i\left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = a_i v^j dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = a_i v^j \delta^i_j = a_i v^i$$

となる．$\wedge^2(V)$ における内積は

$$\begin{aligned}\omega_2(X) &= a_{ij}[dx^i(X)\cdot dx^j - dx^i \cdot dx^j(X)] \\ &= a_{ij}[v_i dx^j - v^j dx^i] = 2a_{ij}v^i dx^j \qquad (4.82)\end{aligned}$$

とする．上式の最後では，a_{ij} の反対称性を用いた．さらに (4.82) との内積は

$$\begin{aligned}\omega_2(X_1, X_2) &= a_{ij}[dx^i(X_1)\,dx^j(X_2) - dx^i(X_2)\,dx^j(X_1)] \\ &= a_{ij}[v_1{}^i v_2{}^j - v_2{}^i v_1{}^j] \\ &= 2a_{ij}v_{1i}v_2{}^j \\ &= 2a_{ij}v_1{}^i dx^j(X_2) \qquad (4.83)\end{aligned}$$

となる．以下同様に 3 形式以上の内積も順次定義される．内積をとるとき，X が dx^i を 1 つ飛び越えるごとに負符号の出ることに注意されたい．

4-7 積分可能条件

2 次の外微分が 0 であることから，積分可能性に関する有用なポアンカレの補題が直ちに導かれる．

一般に，$d\omega=0$ である微分形式 ω を**閉形式**，または閉じた微分形式という．また，$\omega=d\theta$ である微分形式 ω を**完全微分形式**という．この定義から明らかなように，$d^2=0$ であるから完全微分形式は必ず閉形式である．しかし，逆は局所的にしかいえない．すなわち

$$d\omega = 0 \quad \text{ならば} \quad \omega = d\theta \qquad (4.84)$$

なる θ が存在するということは，ある領域（近傍）でしかいえず，全空間に亘

って存在するとは限らない．しかし，局所的にせよ，(4.84) が成り立つことは重要である．

完全微分形式が閉形式であることをポアンカレの補題という．(4.84) はその逆であり，微分形式が積分可能であるか否かの判定条件になる．(4.84) も含めてポアンカレの補題という．

a．ポアンカレの補題

一般に，ω が k 形式で，$d\omega=0$ のとき，$\omega=d\theta$ を満たす $k-1$ 形式 θ が局所的に存在する．すなわち，ω は局所的に積分可能である（証明は略すが，θ の具体的求め方までわかっている）．

簡単な例は，4-5 節で示したストークスの定理である．(4.70) において，

$$\rho = dF_i \wedge dx^i$$

とおくと，外微分の性質 (ii) により $d\rho=0$．よって $\rho=d\omega$ なる 1 形式 ω が存在する．実際に ω は (4.69) の $F_i dx^i$ であった（$\omega=F_i dx^i$）．

もう 1 つよく用いられる応用例を挙げておく．電磁気学で磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は連続で切れないことの表式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \partial_i B^i = 0 \tag{4.85}$$

から，$\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転で表されることを，このポアンカレの補題を用いて導こう．(4.85) は微分形式を用いると 3 形式により

$$dB^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dB^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + dB^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} dB^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 0$$

と表される（右辺の $\frac{1}{2}$ は j, k につき 2 重和をとっているため）．なぜならば，$dx^i \wedge dx^i=0$ なので

$$dB^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{\partial B^1}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{\partial B^1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

dB^2, dB^3 の項についても同様の式が成り立つからである．よって (4.85) は

$$\frac{\partial B^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} dB^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$
$$= d\left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k\right) = 0 \tag{4.86}$$

と表される．ここで

$$\omega = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B^i dx^j \wedge dx^k = B^i dS_i \tag{4.87}$$

とおくと，(4.86) は

$$d\omega = 0$$

となる．よって，ω は閉形式であるから，ポアンカレの補題により，局所的に 1 形式が存在して

$$\omega = d(A_i dx^i) \tag{4.88}$$

と表される．(4.87) と (4.88) を合せると

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \frac{\partial A_k}{\partial x_j}dx^j \wedge dx^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right)dx^j \wedge dx^k$$

よって

$$\epsilon_{ijk}B^i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \tag{4.89}$$

を得る．

(4.89) を逆に解いて書き変えるために次の公式を用いる．ϵ_{ijk} と ϵ^{ijk} の完全反対称性 (4.26 c) により

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ljk} = -2\delta^i_l$$

である．右辺の負符号は (4.26 d) による．(4.89) に ϵ^{ljk} を乗じ，この公式を用いると

$$B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}\right) \tag{4.90}$$

を得る．すなわち，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ なるポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が存在する．

ここで，“局所的に存在”の意味を説明しておこう．例として 1 形式

$$\omega = (xdy - ydx)(x^2 + y^2)^{-1}$$

を考える．

$$\begin{aligned} d\omega &= -2(xdx + ydy)(x^2+y^2)^{-2} \wedge (xdy - ydx) \\ &\quad + (dx \wedge dy - dy \wedge dx)(x^2+y^2)^{-1} \\ &= -2dx \wedge dy(x^2+y^2)^{-1} + 2dx \wedge dy(x^2+y^2)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

よって ω は積分可能であり，$\omega = d\theta$ なる

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

が存在する．しかし，この θ は $x \neq 0$ において定義されているが，$x>0$ と $x<0$ の別々の領域で定義された関数で，$x=0\left(\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ で繋がらない．したがって ω の定義域（原点 $x=0$，$y=0$ を除く）全体に亘っては1つの θ で表せない．すなわち，大域的ではなく，局所的にしか θ の存在はいえないというわけである．

積分可能条件は閉形式でなくとも，もう少し緩い条件でも成り立つフロベニウスの定理というものがある．たとえば，g を関数として1形式

$$\omega = g d\theta \tag{4.91}$$

を考えよう．この ω は完全微分でも，閉形式でもない．

$$d\omega = dg \wedge d\theta \neq 0 \tag{4.92}$$

しかし，$g \neq 0$ とすると $\omega=0$ ならば，$d\theta=0$，よって $\theta=$ 一定という解が存在する．したがってこの場合，$\omega=0$ は積分可能である．このとき（4.92）は

$$d\omega = \frac{1}{g} dg \wedge \omega \equiv \rho \wedge \omega, \qquad \rho \equiv \frac{1}{g} dg$$

と書き直せる．したがって，(4.91) のような ω の場合，$d\omega$ は元の ω と別の1形式 ρ との外積で表される．そのとき方程式 $\omega=0$ は積分可能である．

逆に，

$$d\omega = \rho \wedge \omega \tag{4.93}$$

となる ρ が存在するとき，ω は（4.91）の形に表される．なぜならば，

$$\omega = a_i dx^i, \quad \rho = b_i dx^i \tag{4.94}$$

とおき，これらを（4.93）に代入すると

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = b_j a_i dx^j \wedge dx^i$$

となる．これより

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} = b_j a_i - b_i a_j \tag{4.95}$$

を得る．この解の一意性を仮定すると，上式の解は

$$a_i = g \frac{\partial \theta}{\partial x^i} \tag{4.96}$$

と表される．なぜならば，これを（4.95）に代入して

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial \theta}{\partial x^i}-\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial \theta}{\partial x^j}=b_j g\frac{\partial \theta}{\partial x^i}-b_i g\frac{\partial \theta}{\partial x^j}$$

$$\therefore \quad b_i=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^i} \tag{4.97}$$

である．よって，

$$\omega=g\frac{\partial \theta}{\partial x^i}dx^i=gd\theta,$$

$$\rho=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^i}dx^i=\frac{1}{g}dg.$$

このように1形式 ω の外微分が（4.93）の形に表されるとき，ω は積分可能であり，積分 $\theta=$ 一定を得る．こうして，（4.91）が導かれた．

この結果を一般化したものが，フロベニウスの定理である．

A 個の1形式 $\omega_\alpha(\alpha=1\sim A)$ に対し，連立微分方程式（これをパフ形式という），

$$\omega_\alpha=0 \tag{4.98}$$

が局所的に完全積分可能であるための条件は，

$$d\omega_\alpha=\rho_\alpha{}^\beta\wedge\omega_\beta \tag{4.99}$$

なる1形式 $\rho_\alpha{}^\beta$ が存在することである．（証明略）

5章　相対論的力学

5-1　4元速度，4元加速度

物理法則は互いに矛盾なく整合的に統一されねばならない．力学理論と電磁気理論も同一自然の現象を扱うのであるから，共にローレンツ変換に対し不変となるように統一されるべきである．周知のように，ニュートン力学はガリレイ変換で不変な形式になっているから，これを修正してローレンツ変換で不変な形式にしなければならない．

ニュートン力学の速度 dx^i/dt，加速度 d^2x^i/dt^2 は3次元空間のベクトルであるが，4次元ミンコフスキー空間では，時間 dt が4次元ベクトルの成分であるために，速度，加速度は最早ベクトルではなく，テンソルである．力学法則は加速度と力を用いて定式化されるから，ミンコフスキー空間でベクトルの変換性を有する速度と加速度をまず定義しなければならない．そこで時間 dt の代りに，ローレンツ変換で不変（スカラー）である固有時間

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

を用いれば，$dx^\mu/d\tau$ は4次元ベクトルとなる．そこで相対論的速度

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx^\mu}{dt} \qquad (\mu=0\sim3) \tag{5.1}$$

を導入し，これを4元速度と呼んでいる．この U^μ は4次元ベクトル dx^μ をスカラー $d\tau$ で除したものであるから，明らかに4次元ベクトルである．次に，4元加速度を

$$A^\mu \equiv \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \tag{5.2}$$

で定義すると，これも 4 次元ベクトルである．

ここで記号の説明をしておく．時間 dt を用いた通常の速度，加速度を小文字で

$$u^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad a^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} \qquad (i=1,2,3) \tag{5.3}$$

とし，固有時間 $d\tau$ を用いたものを (5.1)，(5.2) のように大文字で表す．また，慣性系間の相対速度を $\boldsymbol{v}=(v^i)$，物体の速度を U^μ と $\boldsymbol{u}=(u^i)$ で区別して表すことにする．したがって，(5.1) の $\boldsymbol{\beta}$ は $\boldsymbol{u}/c$ である．これまで v/c を β とおいたが，以後は $\beta_0=v/c$ とする．

4 元速度 U^μ の成分を改めて書くと

$$\begin{aligned} U^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{u^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = c\lambda(\beta)\,\beta^0 = c\lambda(\beta) \qquad (\beta^0=1) \\ U^i &= \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{u^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = c\lambda(\beta)\,\beta^i \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる．よって，U^0 はローレンツ因子 $\lambda(\beta)$ を除き定数である．この表式は，ローレンツ変換の行列 (3.8) の第 1 行と第 1 列に現れている．

(5.4) から U^μ の大きさ（長さ）の 2 乗は

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\mu U_\mu = c^2 \tag{5.5}$$

となり，定数であるから，U^μ の 4 成分のうち 3 成分のみ独立である．すると，4 元加速度 A^μ と U^μ はミンコフスキー空間の内積の意味で直交することになる．すなわち，(5.5) を τ で微分すると

$$\eta_{\mu\nu}U^\mu \frac{dU^\nu}{d\tau} = \eta_{\mu\nu}U^\mu A^\nu = U^\mu A_\mu = U_\mu A^\mu = 0 \tag{5.6}$$

となるからである．

5-2　運動方程式

力が作用している場合の物体の運動法則を与える運動方程式は，相対性原理により，すべての慣性系で同形でなければならない，すなわちローレンツ変換

に対して共変でなければならない．また $\beta \simeq 0$ の近似でニュートン力学に一致することも要請される．それゆえ，ニュートンの運動方程式になぞらえて，4元加速度と4元力を用いて次のように定式化するのがよいだろう．m を質量（定数）として

$$mA^\mu = F^\mu, \quad \text{すなわち} \quad m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu. \tag{5.7 a}$$

詳しく書けば

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx^\mu}{dt}\right) = F^\mu \tag{5.7 b}$$

となる．

(5.7) の左辺が4元ベクトルであるから，方程式の共変性の要請から，F^μ は4元ベクトルの変換性を有する力で，ミンコフスキー力と呼んでいる．m は物体固有の（静止）質量で定数である．また，力の作用により物体の速度は時々刻々変化しているので，速度 $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{\beta}$ は時刻 x^0 における瞬間の速度である．

運動方程式 (5.7) は4成分からなりローレンツ変換の下で共変（左右両辺が共にベクトルとして変換）であり，すべての慣性系で成り立つ．その時間成分はニュートン力学にはなかったものであるが，すでに (5.6) で示したように，A^μ は U^μ と直交するので独立成分は U^μ と同じく3個であるから，(5.7) の時間成分の式は独立ではないことがわかる．

まず，4元ミンコフスキー力の空間成分 F^i の意味を考えてみよう．いま時刻 $t=0$ の瞬間に運動物体と共に動く慣性系 O′ をとる．つまり慣性系 O′ では物体はその瞬間に静止しているとする（物体は加速されるから，以後の時刻においてその物体は O′ 系で速度を持つ）．すると，その時刻では $\boldsymbol{u}'=0$ であるから，運動方程式 (5.7) は

$$\left.\frac{d}{dt'}\left(m\frac{dx'^\mu}{dt'}\right)\right|_{t=0} = F'^\mu|_{t=0} \tag{5.8}$$

となる．′ の付いた変数は O′ 系での変数を意味する．この式の左辺の空間成分はニュートンの運動方程式と同形である．したがって F'^i は物体が静止している場合ニュートン力学の力 f'^i と一致する．

次に，ニュートン力学との対応がつき易いように，(5.7) を変形する．そのためにまず，ニュートン力学の運動量からの類推で相対論的運動量を4元速度

を用い,

$$p^\mu \equiv mU^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{mu^\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (u^0 \equiv c) \tag{5.9}$$

と定義しよう．すると (5.7) は

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad \text{あるいは} \quad dp^\mu = F^\mu d\tau \tag{5.10}$$

と表される．この両辺に $\sqrt{1-\beta^2}$ を乗じて

$$\frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu\sqrt{1-\beta^2} \equiv f^\mu \tag{5.11}$$

とおくと, (5.11) はニュートン力学と形の上で一致するから

$$f^i = F^i\sqrt{1-\beta^2} \tag{5.12}$$

を相対論的ニュートン力と呼ぶことにする．さきに述べたように, O′ 系におけるミンコフスキー力はニュートン力と一致する ($F'^i = f'^i$)．時間成分 f^0 については後で考える．

運動方程式 (5.7) や (5.10) は, ローレンツ変換に対してベクトルとして変換されるので, ローレンツ共変であるが, (5.11) の左辺は最早ローレンツ変換のベクトルではないから, f^μ も 4 元ベクトルではなく, 複雑な変換をうける．しかし, 物理的意味がつき易いので, (5.11) がよく用いられる．特に, エネルギー・運動量の保存則は (5.11) から導かれる (後述)．

ここで運動方程式 (5.10) が積分可能であることを, フロベニウスの定理 (4.99) を用いて示しておこう．運動方程式は次の 1 形式で表される．(5.9) と (5.10) より

$$\omega_1{}^\mu = dx^\mu - U^\mu d\tau = 0,$$
$$\omega_2{}^\mu = mdU^\mu - F^\mu d\tau = 0$$

を得る．この連立微分形式が相対論的運動方程式である．これらの外微分をとると

$$d\omega_1{}^\mu = -dU^\mu \wedge d\tau = -\frac{1}{m}\omega_2{}^\mu \wedge d\tau,$$

$$d\omega_2{}^\mu = -\left(\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu + \frac{\partial F^\mu}{\partial U^\nu}dU^\nu\right) \wedge d\tau$$

$$= -\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}\omega_1{}^\nu \wedge d\tau - \frac{1}{m}\frac{\partial F^\mu}{\partial U^\nu}\omega_2{}^\nu \wedge d\tau$$

となり，$d\omega_1{}^\mu, d\omega_2{}^\mu$ は $\omega_1{}^\mu, \omega_2{}^\mu$ によって (4.99) の形に表される．よって力 F^μ が x^μ と U^μ の任意関数に対して積分可能である．ただし，この積分可能性は $\omega_1{}^\mu, \omega_2{}^\mu$ の積分，すなわち，第 1 積分が存在するということで，運動方程式が完全に解けるということを必ずしも意味しない．第 1 積分は $\varphi^\mu(x, U, t)=a^\mu$ という形式であり，それをさらに $U^\mu=dx^\mu/d\tau$ の積分を行って，x^μ を τ と初期条件の関数として求めて初めて完全に運動方程式が解けたことになる．その第 2 積分ができるためには力 F の関数にある種の制限が必要である．

運動方程式 $\omega_1{}^\mu, \omega_2{}^\mu$ は U^μ と τ で表したが，$u^\mu=dx^\mu/dt$ と t で表し，ニュートン的力 f^μ を用いた式も，複雑だが同様に積分可能であることが示される．

5-3　エネルギー・運動量 4 元ベクトル

次に，4 元運動量の時間成分 p^0 と力の時間成分 f^0 の意味を考察する．そのために，(5.6) の関係式，U^μ と A^μ との内積が 0 という性質を使う．そこで，(5.7 a) に U^μ を乗じ内積をとると

$$0 = mU^\mu\eta_{\mu\nu}A^\nu = U^\mu\eta_{\mu\nu}F^\nu$$

すなわち

$$U^\mu\eta_{\mu\nu}F^\nu = U_\mu F^\mu = 0 \tag{5.13}$$

を得る．この式に $(1-\beta^2)$ を乗ずると，(5.4)，(5.12) により

$$cf^0+u_if^i = 0 \tag{5.14}$$

となる．よって ($u_i=-u^i$ に注意して)

$$f^0 = \sum_i \beta^i f^i = \frac{1}{c}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{f}) = \frac{1}{c}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{f}\right) \tag{5.15}$$

この式の右辺は物体に作用したニュートン力 $\boldsymbol{f}$ の単位時間当りの仕事，つまり仕事率を c で除したものである．したがって，cf^0 は仕事率であるから，物体のエネルギー増加率 dE/dt に等しい．この結果と運動方程式 (5.11) の時間成分と合せると

$$\frac{dp^0}{dt} = f^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \tag{5.16}$$

となる．よって積分定数を 0 とおいて，(5.9) の時間成分の表式を用いると

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5.17}$$

を得る．

これにより，E/c は4元運動量の時間成分であり，**エネルギー・運動量は4元ベクトルをつくる**ことがわかる．そして (5.9) と (5.17) とから

$$p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - (\boldsymbol{p})^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\boldsymbol{p})^2 = m^2c^2 \tag{5.18}$$

すなわち，エネルギー・運動量関係式

$$E^2 = c^2(\boldsymbol{p})^2 + m^2c^4 \tag{5.19}$$

を得る．(5.18) は静止質量 m がローレンツ変換の不変量であることを示す．ちなみに $\boldsymbol{\beta}$ は E と $\boldsymbol{p}$ を用いて $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{p}/p_0 = c\boldsymbol{p}/E$ と表される．

物体の速度が小さく $\boldsymbol{\beta} \ll 1$ の場合，(5.17) を β のベキで展開をすると

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\beta^2 + \frac{3}{4}mc^2\beta^4 + \cdots\cdots \tag{5.20}$$

となり，よく知られているように，第1項は静止エネルギー，第2項はニュートン力学の運動エネルギーである．相対論では

$$T = E - mc^2 \tag{5.21}$$

が運動エネルギーである．

また，静止エネルギー

$$E_0 = mc^2 \tag{5.22}$$

をもって，エネルギーと質量の同等性というが，この解釈を正当化するには，詳しい吟味が必要であり，(5.17) から直ちに結論することはできない．なぜならば，(5.16) を積分して (5.17) を導くとき，積分定数を0としたから (5.22) を得たのであって，積分定数を $-mc^2$ とすれば，$E_0 = 0$ となる．この積分定数は物理的条件により決まるのであり，勝手に0とおくわけにはいかない．エネルギーと質量の同等性を主張するためには，物体がエネルギーを吸収・放出することで，その質量が実際に増減することを示し，積分定数の0を正当化しなければならないのである．それについては節を改めて考察することにする．

5-4　エネルギー・運動量保存則

ニュートン力学において，作用-反作用の法則と運動方程式から，全系の運動量とエネルギー保存則が導かれた．エネルギー・運動量保存則は相対論においても成り立つことが示される．ただし，その保存則を与える作用-反作用の法則は，相対論的ニュートン力に対して要請し，ミンコフスキー力ではないのである．その理由はこうである．

n 質点系を考え，慣性系 O での各質点の運動方程式を

$$dp_a{}^\mu = F_a{}^\mu d\tau_a = f_a{}^\mu dt \qquad (a=1\sim n) \tag{5.23}$$

とする．a は質点の番号である．系の全 4 元運動量を P^μ とすると，(5.23) から

$$dP^\mu = d\left(\sum_a p_a{}^\mu\right) = \sum_a F_a{}^\mu d\tau_a = \sum_a f_a{}^\mu dt \tag{5.24}$$

を得る．ここで作用-反作用の法則が $f_a{}^i$ について成立すれば，外力がないとき

$$\sum_a f_a{}^i = 0 \tag{5.25}$$

であるから，(5.24) の空間成分は直ちに積分できて

$$P^i = \sum_a p_a{}^i = \text{一定} \tag{5.26}$$

を得る．これはまさに運動量保存則である．

他方，もし $F_a{}^i$ に対して作用-反作用の法則を要請すると，$\sum_a F_a{}^i=0$ となるから (5.24) より得られる式は

$$\sum_a \frac{dp_a{}^i}{d\tau_a} = 0 \tag{5.27}$$

となる．τ_a は固有時間であり，質点ごとに異なるばかりでなく，質点の速度変化とともに時々刻々変る．それゆえ，(5.27) は簡単に積分できない．たとえ積分できたとしても非常に複雑な保存則となる．したがって，ニュートン力に対して作用-反作用を要請すべきであろう．

そもそも多粒子系の力学的保存則は，全系にわたる力学量の和が一定に保たれることの表現である．したがって，物体ごとに異なる尺度で表した物理量でなく，その力学系に共通の尺度で表した量の和でなければその力学系の保存量

として意味がない．$d\tau_a$ は各質点に固有時間であるから，$d\boldsymbol{p}_a/d\tau_a$ はその質点ごとに異なる尺度で表した運動量変化率である．質点は互いに作用を及し合い運動量を交換しながら運動するので，1つの質点に着目してもこの尺度が時々刻々変る．これでは全系の保存量を表すのに不適切である．それゆえ，力学系の保存量は，その基準系に共通の座標時間 dt をもって表した量の和でなければ物理的意味がつかないので，(5.25) と (5.26) を採用するのがよい．

次にエネルギー保存則であるが，前節で述べたように f^0 は力 $\boldsymbol{f}$ のした仕事率であるから，もし

$$\sum_a f_a{}^0 = 0 \tag{5.28}$$

が成り立つ場合，(5.24) の時間成分からエネルギー保存則

$$P^0 = \sum_a p_a{}^0 = \frac{1}{c}\sum E_a = \frac{1}{c}E = 一定 \tag{5.29}$$

を得る．(5.28) は内力 $\boldsymbol{f}_a$ が各質点にした仕事が互いに打消し 0 となることを表している．これは粒子の衝突前後の力の作用が消えた状態での運動学的エネルギー保存則である．

まとめて，運動学的エネルギー・運動量保存則は

$$P^\mu = \sum_a p_a{}^\mu = 一定 \tag{5.30}$$

と表される．電磁場などのある一般的な場合の保存則はエネルギー・運動量テンソルを用いて定式化するのがよい（7-7 節参照）．

a. 質量中心系

ニュートン力学での質量中心は

$$\frac{\sum m_a \boldsymbol{x}_a}{\sum m_a} = \boldsymbol{X}_M \tag{5.31}$$

と定義できたから，$\boldsymbol{X}_M =$ 一定となる座標系を質量中心系と呼んだ．この質量中心系では全運動量は $\boldsymbol{P} = (\sum m_a)\dot{\boldsymbol{X}}_M = 0$ である．しかし，相対論では，エネルギーと質量が (5.17) によって結ばれていて，いわゆる相対論的質量 $m/\sqrt{1-\beta^2}$ は一定でないので，(5.31) を質量中心とする訳にいかない．そこで全運動量の空間成分が 0，すなわち

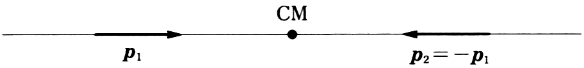


図 5.1　質量中心系

$$P = \sum_a p_a = 0 \tag{5.32}$$

となる基準系を質量中心系と定義する．この直感的理解をうるには 2 粒子系の場合，反対の運動量をもった 2 粒子が正面衝突する系を想定すればよい．衝突により 2 粒子が合体すれば合成粒子は静止したままである．

5-5　エネルギーと質量の同等性

運動方程式の時間成分を積分して得た (5.17) は積分定数を 0 とおいたものであるから，この式が直ちにエネルギーと質量の同等性を意味しないことはすでに指摘した通りである．この同等性は原子力や素粒子実験で確証されていて，周知の事実であるが，理論的にきちんと詰めておくべきである．

(5.17) で積分定数 K を 0 とおけるためには，物理的条件として静止質量がエネルギーに転化されることが必要である．エネルギーは差のみ物理的意味があり，その基準は任意に選びうると通常主張されている．すると，この K も任意にとれるから，0 でなく $-mc^2$ にすれば，静止系で $E=0$ となってしまう．$K=0$ とし，静止系での

$$E_0 = mc^2 \tag{5.33}$$

をもって，質量とエネルギーの同等性と解釈することは，真空のエネルギーを 0 とし，その絶対値に物理的意味を持たせたことになる．

物体がエネルギー E を放出すると，その質量が E/c^2 だけで減少することを，アインシュタインは次の思考実験によって証明した．最初の質量 M の静止物体が，エネルギー $\varepsilon/2$，運動量 $p=\pm\varepsilon/2c$ の 2 個の光子を反対方向に放出し，質量 m になったとすると

$$m = M - \frac{\varepsilon}{c^2}$$

となることを示した．その方法の詳細は省略するが，図の静止系での現象を速

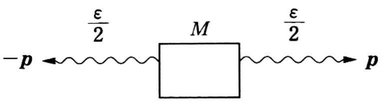


図 5.2　アインシュタインの思考実験

度 v で右方に運動する慣性系にローレンツ変換し，光の放出前後の式を静止系のそれと比較して導いた．

一般に内部エネルギーを物体が失うと，質量が減少することを簡単な粒子系の例で示そう．いま n 質点からなる系をとり，各質点の（静止）質量をそれぞれ m_a とし，エネルギー・運動量ベクトルを $p_a{}^{\mu}$ とする．この n 質点系を（原子核のように）1つの粒子系とみなしたときの全エネルギー・運動量は当然

$$P^{\mu} = \sum_{a}^{n} p_a{}^{\mu} \tag{5.34}$$

である．粒子間ポテンシャル，あるいは平均ポテンシャルがない場合をまず考えよう．

$$P^0 = \frac{E}{c} = \frac{1}{c}\sum_a \varepsilon_a \tag{5.35}$$

である．ここに ε_a は a 番目の粒子のエネルギーで，(5.19) により

$$\varepsilon_a = c\sqrt{\boldsymbol{p}_a{}^2 + m_a{}^2c^2} \tag{5.36}$$

となる．

$p_a{}^{\mu}$ は4元ベクトルであるから，その一次結合 P^{μ} もローレンツ変換に対して4元ベクトルとして振舞う．よって P^{μ} も (5.19) と同じ式を満たし

$$\eta_{\mu\nu}P^{\mu}P^{\nu} = P^{\mu}P_{\mu} = M^2c^2 \tag{5.37}$$

の M は全系の質量とみなすべきである．ここで質量中心系を選ぶと

$$\boldsymbol{P} = 0, \quad \frac{E}{c} = P^0 = \sqrt{\boldsymbol{P}^2 + M^2c^2} = Mc \tag{5.38}$$

(5.35), (5.36) および (5.38) から

$$E = Mc^2 = \sum_a c\sqrt{\boldsymbol{p}_a{}^2 + m_a{}^2c^2} \tag{5.39}$$

となる．

これより n 粒子が自由に内部運動しているとき，複合系の全質量 M は明ら

かに

$$M \geqq \sum_a m_a. \tag{5.40}$$

等号は全粒子が静止した $\boldsymbol{p}_a=0$ の場合に成り立つ．これは内部（熱）エネルギーにより全系のエネルギーが増大したことを示す．いま全粒子の内部（熱）エネルギーが輻射により失われ，静止したとしよう．するとこのときの全系の質量は $\sum m_a$ であるから，質量の減少は

$$\varDelta M = M-\sum_a m_a = \frac{1}{c}\sum(\sqrt{\boldsymbol{p}_a{}^2+m_a{}^2c^2}-m_a c) \tag{5.41}$$

である．この右辺は

$$\frac{1}{c^2}\sum(\varepsilon_a - m_a c^2) = \frac{\varDelta E}{c^2} \tag{5.42}$$

となり，$\varDelta E$ はまさに輻射によって失われたエネルギーであるから，エネルギーと質量の関係

$$\varDelta M = \frac{\varDelta E}{c^2} \tag{5.43}$$

を得る．

ポテンシャルのある場合は，ポテンシャル変化も含めた全系のエネルギー変化 $\varDelta E$ と運動量変化 $\varDelta \boldsymbol{P}$ がローレンツ変換に対して4元ベクトルとして振舞うとしてよいだろう．その理由は，全系の P^μ が変化の前後で，それぞれ1粒子の場合の関係 (5.37) と同じ関係を満たすとしてよいからである．そこで $\varDelta P^0=\varDelta E/c$ と $\varDelta \boldsymbol{P}$ とを，O 系から O′ 系にローレンツ変換する．簡単のために x^1 軸方向のローレンツ変換をとる（任意方向でも結論は同じ）と (3.7) の行列を用いて

$$\varDelta P'^\mu = L^\mu{}_\nu(-\beta^1)\varDelta P^\nu \tag{5.44}$$

より

$$\begin{aligned} \varDelta P'^0 &= \lambda(\varDelta P^0+\beta\varDelta P^1), \\ \varDelta P'^1 &= \lambda(+\beta\varDelta P^0+\varDelta P^1) \end{aligned} \tag{5.45}$$

を得る．ここで O を $\varDelta \boldsymbol{P}=0$ となるような慣性系に選ぶ．このような慣性系は $\varDelta P^\mu$ が4元ベクトルをつくるなら，常に光速以下の座標系として存在する．なぜならば

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{\Delta P^1}{\Delta P^0} < 1$$

だからである．(5.45) で $\Delta P^1=0$ とおくと

$$\Delta P'^0 = \lambda \Delta P^0,$$
$$\Delta P'^1 = \lambda\beta\Delta P^0$$

となる．この両式を (5.9) の $\mu=0$ と $\mu=1$ の式で $P^\mu \to \Delta P^\mu$，$m \to \Delta M$ としたものと比較すれば，$\Delta P'^\mu$ は運動系，ΔP^μ は静止系の量に相当するから

$$\Delta P^0 = \Delta Mc \quad すなわち \quad \Delta M = \Delta E/c^2 \tag{5.46}$$

を得る．こうして任意の系において，エネルギーの増減に対して質量の増減が示された．

全質量 M が何らかの方法で輻射，あるいは運動エネルギーに転化できれば，エネルギーと質量の同等性 (5.17) が完全に示されたことになる．全質量の消滅によるエネルギー転化は，粒子-反粒子の対消滅で実験によっても確認されている．

5-6　角運動量

3次元角運動量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}, \quad すなわち \quad L_i = \epsilon_{ijk}x^j p^k \tag{5.47}$$

を4次元に拡張して，

$$\Omega^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = -\Omega^{\nu\mu} \tag{5.48}$$

を定義しよう．$\Omega^{\mu\nu}$ は反対称テンソルであるから，対角成分が0となり，独立成分は6個である．

空間 - 空間成分は

$$\Omega^{ij} = x^i p^j - x^j p^i = -\epsilon^{ijk}L_k \tag{5.49 a}$$

すなわち3次元角運動量である．

$$L_1 = \Omega^{23}, \quad L_2 = \Omega^{31}, \quad L_3 = \Omega^{12}. \tag{5.49 b}$$

角運動量 L_i は3次元空間で x^i 軸まわりの回転の生成母関数（生成子）であることはよく知られている．いま微小回転を考え，微小回転角を θ_i とすると，x^i 軸まわりの回転によって x^k の変化 δx^k は次のようになる．

x^1 軸まわりの回転の場合は，$x'^1=x^1, x'^2=x^2\cos\theta_1+x^3\sin\theta_1\simeq x^2+\theta_1 x^3$, $x'^3=-x^2\sin\theta_1+x^3\cos\theta_1\simeq x^3-\theta_1 x^2$ だから

$$\delta x^1=0,\quad \delta x^2=\theta_1 x^3,\quad \delta x^3=-\theta_1 x^2 \tag{5.50 a}$$

となる．同様に，x^2 軸まわりの回転では

$$\delta x^1=-\theta_2 x^3,\quad \delta x^2=0,\quad \delta x^3=\theta_2 x^1. \tag{5.50 b}$$

x^3 軸まわりの回転では

$$\delta x^1=\theta_3 x^2,\quad \delta x^2=-\theta_3 x^1,\quad \delta x^3=0 \tag{5.50 c}$$

である．これらをまとめると次のように表される．

$$\delta x^i=-\epsilon^{ij}{}_k\theta_j x^k. \tag{5.51}$$

ここに $\epsilon^{ij}{}_k$ は 4-2 節で定義した完全反対称テンソルと次式で結ばれる

$$\epsilon^{ij}{}_k=\epsilon^{ijl}\eta_{lk}$$

である．

回転角 θ_k は x^i-x^j 平面内の回転角であるので，回転角の表現を θ_k の代りに

$$\omega^{ij}=\epsilon^{ijk}\theta_k=-\omega^{ji} \tag{5.52}$$

を使う方が都合がよい．ω^{ij} と θ_k との違いは符号のみであり，ω^{ij} は向きをつけた回転角である．ω^{ij} を用いて，(5.51) は

$$\delta x^i=\omega^i{}_j x^j,\quad \omega^i{}_j\equiv\eta_{jl}\omega^{il} \tag{5.53}$$

と表される．

角運動量 $L_k=(1/2)\epsilon_{ijk}\Omega^{ij}$ がこの無限小回転の生成子であるとは次のような意味である．いま

$$G\equiv\frac{1}{2}\omega_{ij}\Omega^{ij}\qquad(\omega_{ij}=\omega^{ij}) \tag{5.54}$$

とおくと，この G によって，回転による変化 (5.53) は次のように生成される．

$$\begin{aligned}\delta x^i&=\frac{\partial G}{\partial p^i}=\frac{1}{2}\omega_{jk}\frac{\partial}{\partial p_i}(x^j p^k-x^k p^j)\\&=\frac{1}{2}\omega_{jk}(x^j\delta_i^k-x^k\delta_i^j)=\frac{1}{2}(\omega_{ji}x^j-\omega_{ik}x^k)\\&=-\omega_{ij}x^j=\omega^i{}_j x^j.\end{aligned} \tag{5.55}$$

すなわち，G を p^i で微分すると δx^i を得るから，G あるいは $\Omega^{ij}=\epsilon^{ijk}L_k$ を微小回転の生成子というのである．

同様に，時間 - 空間成分

$$\Omega^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 \equiv K^i$$

は 0-i 平面内の回転（正確には回転ではなく，虚数角回転に相当する擬回転）に対応する x^i 軸方向のローレンツ変換の生成子なのである．(5.54)，(5.55) のように

$$G \equiv \omega_{0i}\Omega^{0i} \tag{5.56}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \frac{\partial G}{\partial p^0} = -\omega_{0i}x^i = -\omega^0{}_i x^i, \\ \delta x^i &= \frac{\partial G}{\partial p^i} = \omega_{0i}x^0 = -\omega_{i0}x^0 = \omega^i{}_0 x^0 \end{aligned} \tag{5.57}$$

を得る．この結果は空間回転を伴わないローレンツ変換の行列 (3.8) で β^i を微小として，β^i の 1 次まで残した場合の表式

$$L(\boldsymbol{\beta} \ll 1) \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\beta^1 & -\beta^2 & -\beta^3 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

から得られる無限小ローレンツ変換

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu(\boldsymbol{\beta} \ll 1)x^\nu, \quad \delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu \tag{5.59}$$

に対応する．それゆえ，

$$\begin{aligned} &\omega^0{}_i = \omega^i{}_0 = -\beta^i \ll 1 \\ \therefore\quad &\omega_{0i} = -\omega_{i0} = -\beta^i \end{aligned} \tag{5.60}$$

は 2 つの慣性系の微小相対速度を表す．

この節の最後に，$\Omega^{0i} = K^i$ のもう 1 つの物理的意味を指適しておく．n 個の粒子系を考えると

$$\boldsymbol{K} = \sum_{a=1}^{n}(x_a{}^0\boldsymbol{p}_a - p_a{}^0\boldsymbol{x}_a) \tag{5.61}$$

n 粒子系の全エネルギー・運動量は

$$E = \sum_a E_a = c\sum_a p_a{}^0, \quad \boldsymbol{P} = \sum_a \boldsymbol{p}_a \tag{5.62}$$

である．ここで $x_a{}^0 = ct$ とおいて共通の座標時間で表すと，(5.61) は

$$\boldsymbol{K} = ct\boldsymbol{P} - \sum_a \frac{E_a}{c}\boldsymbol{x}_a \tag{5.63}$$

となる．また，相対論的質量中心を次式で定義しよう．

$$\boldsymbol{X}_M = \sum \frac{E_a \boldsymbol{x}_a}{E} \tag{5.64}$$

この $\boldsymbol{X}_M$ は非相対論的極限（$\beta \ll 1$）でニュートン力学の質量中心（5.31）に一致することは

$$E_a \longrightarrow m_a c^2$$

から明らかである．

他方，n 粒子系の質量中心の速度 $\boldsymbol{V}_M$ は，全系のエネルギー・運動量 $E, \boldsymbol{P}$ を用いて

$$\boldsymbol{V}_M = \frac{c^2\boldsymbol{P}}{E} \tag{5.65}$$

と表される（1 粒子の場合，(5.9) により $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{p}/p^0 = c^2\boldsymbol{p}/E$ であるのと同様）．

以上の定義（5.64），（5.65）と（5.63）とから

$$\frac{\boldsymbol{K}}{E} = ct\frac{\boldsymbol{P}}{E} - \frac{1}{c}\boldsymbol{X}_M = \frac{1}{c}(\boldsymbol{V}_M t - \boldsymbol{X}_M) \tag{5.66}$$

を得る．全系が閉じていれば，エネルギー・運動量が保存する．さらに全系がローレンツ変換で不変ならば $\boldsymbol{K}$ は時間的に一定であることが示される（証明は 7-3 節と（7.40）を参照）．するとこのような系において，（5.66）は

$$\boldsymbol{V}_M t - \boldsymbol{X}_M = 一定 \tag{5.67}$$

となる．この式は閉じている系の質量中心が一定速度 $\boldsymbol{V}_M$ で運動していることを示す．さきに全運動量 $\boldsymbol{P}=0$ によって質量中心を定義した（5.32）によれば，(5.65) から $\boldsymbol{V}_M=0$，したがって，$\boldsymbol{X}_M=$ 一定となり，2 通りの方法で定義した質量中心（5.32）と（5.64）は整合する．

角運動量テンソルを時間で微分して，回転の運動方程式を導いておこう．(5.4）により

$$\frac{d}{d\tau}\Omega^{\mu\nu} = U^\mu p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} - U^\nu p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{5.68}$$

となる．上式で

$$U^\mu p^\nu - U^\nu p^\mu = mU^\mu U^\nu - mU^\nu U^\mu = 0$$

である．さらに運動方程式（5.10）を考慮すると，（5.68）は

$$\frac{d\Omega^{\mu\nu}}{d\tau}=x^{\mu}F^{\nu}-x^{\nu}F^{\mu} \tag{5.69}$$

となる．この空間-空間成分

$$\frac{d\Omega^{ij}}{d\tau}=x^{i}F^{j}-x^{j}F^{i} \tag{5.70}$$

は座標原点に関するミンコフスキー力 $\boldsymbol{F}$ の能率，モーメントである．両辺に $\sqrt{1-\beta^2}$ を乗ずれば，通常の力の能率を得る．

以上で，質点系の相対論的力学を終え，電磁場のマクスウェル方程式に移ろう．

6章　電磁場の理論

これまで，質点系の相対論を扱ってきたが，電磁場や連続流体のような場を相対論的に定式化する必要がある．電磁気学のマクスウェル方程式は，そもそも相対性理論が誕生する引き金となったものである．

6-1　マクスウェル方程式と4元電流

マクスウェル方程式は，ローレンツ変換の下で共変的であることは，すでにローレンツが示したことであるから，ミンコフスキー空間において4次元形式に書き直されることは明らかである．実際に，4元電磁ポテンシャルを導入して，きれいな形式にまとめられる．

マクスウェル方程式は次の4式である．

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho, \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

第1式はクーロンの法則，第2式は電流の磁気作用アンペールの法則，第3式は磁荷が存在しないこと，すなわち磁束密度は連続であることを示し，第4式はファラデーの電磁誘導の法則である．$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ電束密度，磁束密度であり，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は電場と磁場である．また，ρ は荷電密度，$\boldsymbol{f}$ は電流密度を表す．$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ は真空中では，それぞれ

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{6.2}$$

で結ばれる．ε_0 は真空の誘電率，μ_0 は誘磁率と呼ばれる定数である．

電荷-電流密度は連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{j} = 0 \tag{6.3}$$

を満たし，この式は電荷の保存を表す．いま電荷を包む充分大きい領域を V とし，その表面 S で電荷はないとする．(6.3) を V にわたり積分して，ガウスの定理を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{j} dV = -\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.4}$$

を得る．表面 S で $\boldsymbol{j}$ は 0 であるから上式の右辺は 0．よって電荷 Q の保存則を得る．

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = 0. \tag{6.5}$$

マクスウェル方程式を 4 次元形式に書き直すため，まず，$c\rho$ と $\boldsymbol{j}$ が 4 元ベクトルをつくることを示そう．いま 3 次元体積要素 dV の中の電荷と，それがつくる電流を考える．

$$\text{電荷}：\rho dV, \qquad \text{電流}：\boldsymbol{j} dV = \rho \boldsymbol{u} dV.$$

$\boldsymbol{u}$ は電荷の速度である．ここで，電気量は運動速度により変らない，つまりどの慣性系においても不変であるとする．このことは電荷の保存則 (6.5) とも整合的であり，実験とも矛盾しない（電子の電荷は一定値を保っている）．そこで，電荷の静止系での値を $\rho_0 dV_0$ とすると（ρ_0 は t を含まない $\boldsymbol{x}$ のみの関数）

$$\rho dV = \rho_0 dV_0. \tag{6.6}$$

3 次元体積は，運動方向のローレンツ短縮のため，次のように変る．

$$dV = \lambda^{-1}(\beta) dV_0 = dV_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{6.7}$$

したがって，(6.6) と (6.7) より

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho_0 \lambda(\beta) \tag{6.8}$$

となる．すると電流密度は

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{u} = \rho_0 \boldsymbol{u} \lambda(\beta) \tag{6.9}$$

と表されるから，ρ と $\boldsymbol{j}$ をまとめて

$$(c\rho, \boldsymbol{j}) = \rho_0(c\lambda(\beta), \boldsymbol{u}\lambda(\beta)) = \rho_0(U^0, \boldsymbol{U}) \tag{6.10}$$

となる．U^μ は 4 元速度，ρ_0 は定数であるから，$c\rho = j^0$ とおくと，$c\rho$ と $\boldsymbol{j}$ とは 4 元ベクトルをつくることになる．

$$j^\mu = \rho_0 U^\mu = \rho u^\mu. \tag{6.11}$$

この j^μ を 4 元電流という．

この表式を用いると，連続の方程式 (6.3) は 4 次元発散の式

$$\partial j^\mu / \partial x^\mu = 0 \tag{6.12}$$

と表される．さきに 4-4 節で述べたように $\partial/\partial x^\mu$ は共変ベクトルであるから，(6.12) はローレンツ変換のスカラー，すなわちローレンツ不変式である．よって，電荷の保存則は任意の慣性系において成り立つ．

電荷-電流密度が 4 元電流をつくるということが，マクスウェル方程式を 4 次元形式に書き換える重要な手掛りとなる．まず，(6.1) の第 1，第 2 式の右辺は 4 元ベクトルを構成するから，左辺も同様に 4 元ベクトルの変換性を持つべきである．そうでなければローレンツ変換で共変でなくなり，相対性原理を満足しない．その 2 式の左辺を 4 元ベクトルの形に直すために，第 3 式と第 4 式を用いて，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ をベクトルポテンシャル A_μ で表す式を求めよう．

6-2 ベクトルポテンシャルの導入

以前 4-7 節で求めたように，ポアンカレの補題を用いて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad \text{から} \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

を導くとき，(4.87) の ω が閉形式であることから，(4.88) のように

$$\omega = d(A_i dx^i)$$

とおいた．今度は 4 次元形式の定式化を試みているのであるから，

$$\omega = d(A_\nu dx^\nu) \tag{6.13}$$

と拡張してみよう．(6.13) の微分を遂行し，空間成分と時間成分を分けて書くと

$$\omega = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) dx^i \wedge dx^j + \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i}\right) dx^0 \wedge dx^i$$

となる．ω は (6.13) により完全微分形式であるから，その微分は恒等的に 0 である．式を簡単化するために，

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{6.14}$$

とおこう．$F_{\mu\nu}$ は μ, ν につき反対称である．こうすると

$$\omega = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{6.15}$$

そして

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{2} dF_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j + dF_{0i} \wedge dx^0 \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j + \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^0} dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &\qquad + \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^0 \wedge dx^i \equiv 0 \end{aligned}$$

ここで，$F_{\mu\nu}$ の反対称性と dx^μ 同士の反可換性を使って上式を書き変えると

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^j}\right) dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.16}$$

(6.16) は恒等的に 0 であり，$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ と $dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j$ は独立であるから，第 1 項と第 2 項はそれぞれ 0 でなければならない．

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 0, \tag{6.17 a}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^j}\right) dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j = 0. \tag{6.17 b}$$

マクスウェル方程式 (6.1) の第 3 式からは，すでに (4.90) に求めたように

$$B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}\right) = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F_{jk} \tag{6.18}$$

となる．すると，(6.17 a) はまさに (6.1) の第 3 式なのである．実際に，(6.18) は次のように変形される．3 形式 $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ の i, j, k はすべて異なり，1, 2, 3 のいずれかである．しかも完全に反対称であるから

$$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = -\epsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{6.19}$$

と表される．よって (6.17 a) は

$$\epsilon^{ijk}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=-2\frac{\partial B^k}{\partial x^k}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=0 \quad (6.20)$$

となり，$\partial B^k/\partial x^k=0$ を得る．

次に，(6.17 b) は (6.1) の第 4 式に対応することを示す．(6.17 b) の第 1 項は (6.18) を逆に解いた式

$$F_{ij}=\epsilon_{ijk}B^k \quad (6.21)$$

を用いると

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^0}dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial B^k}{\partial x^0}dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j$$

となる．さらに

$$E_i=cF_{i0} \quad (6.22)$$

とおくと，(6.17 b) の第 2 項は

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_i}{\partial x^j}dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j=\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x^i}-\frac{\partial E_i}{\partial x^j}\right)dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j$$
$$=\frac{1}{2c}\epsilon_{ijk}(\nabla\times\boldsymbol{E})^k dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j$$

となる．したがって，これらをまとめると (6.17 b) は

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left[\frac{\partial B^k}{\partial x^0}+\frac{1}{c}(\nabla\times\boldsymbol{E})^k\right]dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j=0 \quad (6.23)$$

と表される．この式より (6.1) の第 4 式を得る ($x^0=ct$ に注意)．

こうして，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{E}$ は電磁ポテンシャル A_μ により，(6.18) と (6.22) によって表されることが示された．まとめると，電磁場は (6.14) の $F_{\mu\nu}$ を用いて次のように表される．

$$\begin{aligned}B^i&=-\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}=-\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^k}\right),\\ E_i&=cF_{i0}=c\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^0}-\frac{\partial A_0}{\partial x^i}\right).\end{aligned} \quad (6.24)$$

このように，磁束密度 B^i と電場 E_i はそれぞれ 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ の空間-空間成分と空間-時間成分であることがわかった．ただし，この導き方からわかるように，A_μ はまだ 4 元ベクトルであることは証明されていない．したがって，この段階では $F_{\mu\nu}$ はミンコフスキー空間のテンソルであるとは限らな

いのである．A_μ が本当に4元ベクトルであることは，マクスウェル方程式の残る第1式と第2式にある，$j^\mu=(c\rho, \boldsymbol{j})$ が4元ベクトルであることを用いねばならないのである．ただし，(6.13) の ω がローレンツ不変であることを前提とすれば A_μ が4元ベクトルであることは明らかである．いずれにせよ，(6.1) の第3，4式は，ベクトルポテンシャル A_μ の存在と，A_μ によって $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$ が表されるための必要十分条件であるということを念頭に置いておくべきである．

6-3　マクスウェル方程式の4次元定式化

さていよいよマクスウェル方程式の本体，(6.1) の第1，2式を $F_{\mu\nu}$ で書き表すことにしよう．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係は (6.2) を用い，すべての場の量を $F_{\mu\nu}$，あるいは A_μ によって表すことができる．

その前に，B^i や E_i の添字の上げ下げの規則を決めておこう．計量テンソルが $\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=(1, -1, -1, -1)$ なので，時間成分の上げ下げは符号は変らず，空間成分のみ上げ下げで符号が変る．それゆえ

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}F^{\lambda\rho}, \qquad \therefore \quad F_{ij} = F^{ij}, \quad F_{i0} = -F^{i0}. \tag{6.25}$$

これより，

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} = B^i, \\ E^i &= cF^{i0} = -cF_{i0} = -E_i. \end{aligned} \tag{6.26}$$

そして (6.1) の $\boldsymbol{E}$ の成分は $E_i=-E^i$，$\boldsymbol{B}$ の成分は $B^i=B_i$ である．

(6.1) の第1式と第2式はそれぞれ

$$-\varepsilon_0\frac{\partial E^i}{\partial x^i} = c\varepsilon_0\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \frac{j^0}{c}, \tag{6.27 a}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\epsilon^{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x^j} + c^2\varepsilon_0\frac{\partial E^i}{\partial x^0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + c^2\varepsilon_0\frac{\partial F^{i0}}{\partial x^0} = j^i \tag{6.27 b}$$

となる．(6.27 b) において，(6.21) に対応する

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B_k \tag{6.28}$$

を用いた．

ところで，ここで用いている MKS 単位系では

$$\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2} \tag{6.29}$$

であるから，(6.27 a) を $c\varepsilon_0$ で割り，(6.27 b) に μ_0 を乗ずると

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \mu_0 j^0,$$

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial F^{i0}}{\partial x^0} = \frac{\partial F^{i\mu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 j^i.$$

これら2式はまとめて1つの式で表され

$$\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^\mu} = \mu_0 j^\lambda \tag{6.30}$$

となる．

(6.30) の右辺は4元電流で，4元反変ベクトルであるから，方程式の共変性から左辺も4元反変ベクトルでなければならない．すると $F^{\lambda\mu}$ は2階反変テンソルであることがこれでわかる．すると $F_{\mu\nu}$ は4次元共変テンソルであり，(6.14) により A_μ は4元共変ベクトルであることも示せたわけである．

(6.1) の第3，第4式も (6.30) のように1つにまとめて表すことができる．(6.17 a) と (6.17 b) の基底をはずし，その係数を取り出すと，それぞれ

$$\epsilon^{ijk}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0, \tag{6.31 a}$$

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{j0}}{\partial x^i} = 0 \tag{6.31 b}$$

を得る．(6.31b) も $0, i, j$ の循環和であるから，4次元完全反対称テンソルを用いて

$$\epsilon^{k\lambda\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0$$

と書ける（$\epsilon^{k\lambda\mu\nu}$ の k は空間成分であるから λ, μ, ν は $0, i, j$ のどれかである）．(6.31 a) の ϵ^{ijk} は $\epsilon^{0\lambda\mu\nu}$ で置き替えられるから，両式はまとめて

$$\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \equiv -2\frac{\partial F^{*\rho\lambda}}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{6.32}$$

と表すことができる．ここに $F^{*\rho\lambda}$ は $F_{\mu\nu}$ の双対 (dual) テンソルと呼ばれ

$$F^{*\rho\lambda} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\rho\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{6.33}$$

によって定義される．F^* の成分を $\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{B}^*$ で表すと，i, j, k を循環的として次

のようになる.

$$F^{*ij}=-F_{k0},\qquad \therefore\quad B_k{}^*=-\frac{1}{c}E_k.$$
$$F^{*0i}=F_{jk},\qquad \therefore\quad -\frac{E^{*i}}{c}=B^i. \tag{6.34}$$

マクスウェル方程式の4次元定式化によって $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は同一の4次元反対称2階テンソルの異なる成分であることがわかった. この意味で, 電磁場の本当の意味での統一は相対論によって完成されたといえる.

6-4　微分形式によるマクスウェル方程式の表現

マクスウェル方程式 (6.1) の第3, 第4式は, ベクトルポテンシャル A_μ の存在を示す式であった. 1形式

$$\alpha\equiv A_\mu dx^\mu, \tag{6.35}$$

から, 場 $F_{\mu\nu}$ を

$$\omega=d\alpha=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{6.36}$$

によって導くことで, 第3, 第4式は

$$d\omega=\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}dx^\lambda\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu=0 \tag{6.37}$$

と表されることを6-2節で示した. 他方, 第1, 第2式の方は (6.30) にまとめられたが, この式も $\omega=d\alpha$ を用いて表すことができることを示そう.

そのために, 双対形式と＊印作用素を導入する. 任意の1形式

$$\theta_1=t_\mu dx^\mu \tag{6.38}$$

に対して, 3形式

$$*\theta_1=\frac{1}{3!}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}t^\lambda dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge dx^\rho \tag{6.39}$$

という変換を考えよう. ここで $t^\lambda=\eta^{\lambda\mu}t_\mu$ である. この $*\theta$ を θ の双対形式といい, この種の操作を“＊印作用素”という.

1形式に限らず, 2形式, 3形式についても＊印作用素は定義される. 2形式

$$\theta_2=\frac{1}{2!}t_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{6.40}$$

に対して，その双対2形式を次式で定義する．

$$*\theta_2 = \frac{1}{2!2!}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}t^{\lambda\mu}dx^\nu \wedge dx^\rho. \tag{6.41}$$

また，3形式

$$\theta_3 = \frac{1}{3!}t_{\lambda\mu\nu}dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{6.42}$$

に対する双対1形式は

$$*\theta_3 = \frac{1}{3!}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}t^{\lambda\mu\nu}dx^\rho \tag{6.43}$$

となる．ここに $t^{\lambda\mu}$, $t^{\lambda\mu\nu}$ などは，それぞれ

$$t^{\lambda\mu} = \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}t_{\nu\rho}, \quad t^{\lambda\mu\nu} = \eta^{\lambda\alpha}\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\gamma}t_{\alpha\beta\gamma} \tag{6.44}$$

である．(6.33) で導入した $F^{*\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ の双対テンソルという．

一般に，r 形式の双対形式は $(4-r)$ 形式である．そして θ_1 がローレンツ変換の不変形式であれば，$*\theta_1$ も不変形式である．なぜならば，4-2節で示したように $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ は4階の共変テンソルであるから，(6.39) から明らかなように，$*\theta_1$ は共変テンソルと反変ベクトルとが縮約された不変形式だからである．同様に θ_r が不変形式ならば $*\theta_r$ も不変形式である．

特に，1形式 dx^α の双対3形式は (6.38)，(6.39) により

$$*dx_\alpha = \frac{1}{3!}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\eta^{\alpha\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \equiv d\sigma^\alpha \tag{6.45}$$

となる．各成分に分けて表すと

$$\begin{aligned} d\sigma^0 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad d\sigma^1 = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0, \\ d\sigma^2 &= dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0, \quad d\sigma^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \tag{6.46}$$

となる．あるいは，(6.45) に $\eta^{\alpha\beta}$ を乗じて，上付き α を下に降すと

$$d\sigma_\alpha = \frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{6.47}$$

となるから，

$$\begin{aligned} d\sigma_0 &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad d\sigma_1 = -dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0, \\ d\sigma_2 &= -dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0, \quad d\sigma_3 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \tag{6.48}$$

$d\sigma^\mu = \eta^{\mu\nu}d\sigma_\nu$，すなわち，$d\sigma^0 = d\sigma_0$, $d\sigma^i = -d\sigma_i$ である．この $d\sigma_\mu$ は4次元ミンコフスキー空間の中の3次元超曲面に立てた法線成分を表す．$d\sigma_0$ は3次元

体積要素で，x^1, x^2, x^3 軸に垂直な x^0 成分である．$d\sigma_1$ は x^2, x^3 に垂直な面積要素 dS_1（右手系）と dx^0 の外積である．$d\sigma^2, d\sigma^3$ についても同様である．物理的に重要なことは $d\sigma^\mu$ が反変ベクトル，$d\sigma_\mu$ が共変ベクトルの変換性を有するということである．

この＊印作用素を用いて，(6.36) から $*\omega$ を求めてみよう．ω は2形式であるから

$$*\omega = *d\alpha = \frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}dx^\nu \wedge dx^\rho. \tag{6.49}$$

ω は完全形式 $d\alpha$ であったが，$*\omega$ は最早完全形式ではない．それゆえ $d*\omega$ は0でない．そこで (6.49) を微分すると

$$d*\omega = \frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma}dx^\sigma \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{6.50}$$

を得る．(6.50) を変形して，マクスウェル方程式 (6.30) の左辺を導くには，次のような演算を用いれば機械的にやれる．まず，(6.47) を逆に解いて3形式を $d\sigma_\mu$ で表そう．(6.47) の両辺に $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ を乗じ α で和をとると

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}d\sigma_\alpha = \frac{1}{3!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \tag{6.51}$$

完全反対称 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ の添字はすべて異なり 0, 1, 2, 3 のいずれかであるから，右辺の ϵ の積で，β, γ, δ はそれぞれ μ, ν, ρ のいずれか1つと同じである．完全反対称性を用いると

$$-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} = \delta^\beta_\mu\delta^\gamma_\nu\delta^\delta_\rho + \delta^\beta_\nu\delta^\gamma_\rho\delta^\delta_\mu + \delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\mu\delta^\delta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\gamma_\rho\delta^\delta_\nu - \delta^\beta_\nu\delta^\gamma_\mu\delta^\delta_\rho - \delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\nu\delta^\delta_\mu \tag{6.52}$$

となる（左辺の負号は (4.26) の定義による）．ちなみに類似の公式も記しておこう．これもよく使われる有用な公式である．

$$-\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \delta^\gamma_\mu\delta^\delta_\nu - \delta^\gamma_\nu\delta^\delta_\mu \tag{6.53}$$

(6.52) を用いて (6.51) の右辺を計算すると，反対称性から6項とも同じになり，

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}d\sigma_\delta. \tag{6.54}$$

この表式を (6.50) に代入し，(6.53) を適用すると

$$d*\omega = \frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\epsilon^{\sigma\nu\rho\tau}\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}}d\sigma_{\tau} = -\frac{1}{2}(\delta_{\lambda}^{\sigma}\delta_{\mu}^{\tau}-\delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\lambda}^{\tau})\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\sigma}}d\sigma_{\tau}$$
$$= -\frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\lambda}}d\sigma_{\mu} \tag{6.55}$$

を得る．これは (6.30) の左辺に $d\sigma_{\mu}$ を乗じたものである．

他方，4 元電流の 1 形式を

$$j = j_{\mu}dx^{\mu} = \eta_{\mu\nu}j^{\nu}dx^{\mu} \tag{6.56}$$

とおくと，その双対形式は (6.45) により

$$*j = j_{\mu}*dx^{\mu} = j_{\mu}d\sigma^{\mu} = j^{\mu}d\sigma_{\mu} \tag{6.57}$$

である．

こうして，マクスウェル方程式 (6.30) は，(6.55) と (6.57) によって

$$d*\omega = \mu_0 * j \tag{6.58}$$

と表される．結局，マクスウェル方程式は (6.37) と (6.58) の 2 式にまとめられることがわかった．

改めてまとめて記すと，**マクスウェル方程式は，1 形式**

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A_{\mu}dx^{\mu}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{d\alpha} \tag{6.59}$$

をもとにして

$$\boldsymbol{d\omega} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{d*\omega} = \boldsymbol{\mu_0 * j} \tag{6.60}$$

と表される．

ここで強調すべきことは，基本となる 1 形式 α がローレンツ変換に対して不変形式であるから，その外微分で導かれる (6.59)，(6.60) のすべての形式がローレンツ不変であるということである．したがって，微分形式で表されたマクスウェル方程式 (6.59)，(6.60) は座標系の選び方に依存しない．しかもベクトルやテンソルの成分を陽に書く必要がない．この点が微分形式の著しい特徴であり，利点でもある．

4 元電流の連続の方程式は (6.60) の第 2 式を外微分することで直ちに導かれる．

$$0 = d^2*\omega = \mu_0 d*j = \mu_0 d\left(\frac{1}{3!}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}j^{\lambda}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\rho}\right)$$
$$= \frac{1}{3!}\mu_0\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\frac{\partial j^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}dx^{\sigma}\wedge dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\rho} \tag{6.61}$$

添字 λ, μ, ν, ρ はすべて異なり，σ, μ, ν, ρ も互いに異ならねば 0 だから，$\lambda=\sigma$ のところのみ残る．よって上式は

$$\mu_0 \frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\lambda} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0 \tag{6.62}$$

となる．これより

$$\frac{\partial j^\lambda}{\partial x^\lambda} = 0 \tag{6.63}$$

を得る．この連続の方程式は，(6.30) を x^λ で微分し，$F^{\lambda\mu}$ の反対称を考慮しても得られる．

ここで (6.61) の右辺の $*j$ について物理的意味を説明しておこう．

$$*j = j^\mu d\sigma_\mu = j^0 d\sigma_0 + j^i d\sigma_i \tag{6.64}$$

であるが，$d\sigma_0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ は体積要素 (右手系で方向付けられたもの) であるから

$$j^0 d\sigma_0 = c\rho d\sigma_0 \tag{6.65}$$

は体積要素 $d\sigma_0$ の中の電荷量を表す．次の $j^i d\sigma^i$ の $d\sigma^1 = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0$ は x^1 方向の面積要素 $dS_1 = dx^2 \wedge dx^3$ と時間 dx^0 の積であるから，$j^1 d\sigma_1$ は dS_1 を通って dx^0 間に流れる電流を表す．よって

$$-j^i d\sigma_i = \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \wedge dx^0 \tag{6.66}$$

は面積要素 $d\boldsymbol{S}$ に垂直に dx^0 間に通過する電流の量である．このように，微分形式を用いたマクスウェル方程式の表式は，自然のうちに物理的意味が付与されるようになっている．

6-5　ゲージ変換

マクスウェル方程式をポテンシャル A_μ で表すと，よく知られているように，A_μ は一義的に定まらず，ゲージ変換という x^μ の任意関数を含む変換

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^\mu} \tag{6.67}$$

の任意性がある．この変換で場の量 $F_{\mu\nu}$ は不変である．

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = F_{\mu\nu} \tag{6.68}$$

マクスウェル方程式は $F_{\mu\nu}$ で表されるから，$F_{\mu\nu}$ が不変なら A_μ と A'_μ は物理的に同等である．

このゲージ変換の自由度は（6.59）と（6.60）を用いても導かれることを示そう．いま1形式 α に他の1形式を加えた次の変換を考えよう．

$$\alpha' = \alpha+\theta, \qquad \omega' = d\alpha' = d\alpha+d\theta. \tag{6.69}$$

この α' を用いて（6.60）を変換すると

$$d\omega' = d^2\alpha+d^2\theta = 0, \qquad d*(d\alpha+d\theta) = \mu_0 * j \tag{6.70}$$

となる．したがって（6.70）の最後の式で

$$d*d\theta = 0 \tag{6.71}$$

ならば，（6.59）と（6.60）は不変である．よって，θ が（6.71）を満たす限り α と α' は物理的に同等である．

（6.71）の解のうち，最も簡単なものは θ が完全形式であるもの

$$\theta = d\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu}dx^\mu \tag{6.72}$$

である．よって

$$\alpha' = \alpha+d\Lambda = \left(A_\mu+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu}\right)dx^\mu = A'_\mu dx^\mu \tag{6.73}$$

とおくと，（6.67）のゲージ変換が得られる．

任意関数 $\Lambda(x)$ を含むゲージ変換 (6.67) により，A_μ のうち少なくとも1つは任意に選ぶことができる．このゲージ変換の自由度を用いて，問題を単純化したり，電磁ポテンシャルの波動方程式を導くことができる．(6.71) の解として，(6.72) 以外に θ は存在しない．

6-6　波動方程式

マクスウェル方程式をポテンシャル A_μ によって表すと，(6.14)，(6.30) から

$$\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} = \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 A_\rho}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right) = \mu_0 j^\lambda \tag{6.74}$$

$$\therefore \quad \eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2 A^\lambda}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\eta^{\lambda\rho}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\right) = -\mu_0 j^\lambda \tag{6.75}$$

となる．第1項の微分演算子はダランベール演算子である．

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}=\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}-\nabla^2=\Box \tag{6.76}$$

(6.75) の第2項の (　) の中は A^μ の4次元発散であるが，前節で指摘したように，A_μ にはゲージ変換の任意性があるので，その任意性を用いると

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=0 \tag{6.77}$$

と選ぶことができる．すると (6.75) は

$$\Box A^\mu=-\mu_0 j^\mu \tag{6.78}$$

となる．

(6.77) の条件は，A_μ がこの関係を満たすようにゲージ変換の任意関数 Λ を決めたのであるから，A_μ のゲージを固定したことになる．この意味で (6.77) はゲージ固定条件の一種であり，このゲージ固定をローレンツゲージ，または共変ゲージと呼んでいる．ゲージ固定条件はこれ以外にも無限に可能であるが，ローレンツゲージの他に物理的意味の明らかなものはクーロンゲージなど僅かである．

ところで，(6.78) であるが，電荷電流から離れた真空中では $j^\mu=0$ であるからそこでは

$$\Box A_\mu=0 \tag{6.79}$$

となる．これはよく知られた波動方程式で，真空中を伝わる電磁波を表す．振動数を $\nu=ck_0$，波数ベクトルを k_1, k_2, k_3 とすると，(6.79) の解として

$$A_\mu=A_\mu(k_\nu x^\nu)=A_\mu(\nu t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{6.80}$$

がある．この A_μ を (6.79) に代入すると

$$k_\lambda k^\lambda A_\mu''=\left(\frac{\nu^2}{c^2}-\boldsymbol{k}^2\right)A_\mu''=0. \tag{6.81}$$

したがって，$\nu=c|\boldsymbol{k}|$ であり，(6.80) は $\boldsymbol{k}$ 方向に速度 $\nu/|\boldsymbol{k}|=c$ で伝わる波動解である．ただし，ローレンツゲージ条件 (6.77) により

$$k_\mu A^{\mu\prime}=\frac{\nu}{c}A^{0\prime}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}'=0 \tag{6.82}$$

である．A_μ として sin 関数をとると，平面波となり，$k_\mu x^\mu$ はその位相を表す ($'$ は位相 $\theta=k_\mu x^\mu$ による微分を表す)．

(6.77) と (6.78) を微分形式で表しておこう．4次元発散は $\partial_\mu j^\mu$ を表したのと同様に，1形式の＊印を用いて表すと

$$*\alpha = *(A_\mu dx^\mu) = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^\mu dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \tag{6.83}$$

であるから

$$d*\alpha = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma$$
$$= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{6.84}$$

よって，ローレンツゲージ条件は次式で表される．

$$d*\alpha = 0. \tag{6.85}$$

ダランベール演算子□は，上の式で A^μ を $\partial f/\partial x^\mu$（$f$ は任意関数）とみなせば直ちに求まる．つまり，$A_\mu dx^\mu \rightarrow df = (\partial f/\partial x^\mu)\,dx^\mu$ とすると

$$d*df = \Box f d\Sigma, \quad d\Sigma \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{6.86}$$

f は任意であるから，一般に4次元体積要素 $d\Sigma$ を除き，

$$\Box \sim d*d \tag{6.87}$$

とみなすことができる．よって，(6.78) は

$$d*dA^\mu = -\mu^0 j^\mu d\Sigma \tag{6.88}$$

となる．

6-7　電磁場のローレンツ変換

電磁場はローレンツ変換でどのように変換されるか，具体的に見てみよう．電磁場 $F_{\mu\nu}$ は2階反対称テンソルであるから，4-2節の説明のように，次のように変換される．ローレンツ変換の前後の量を $F_{\mu\nu}$ と $F'_{\mu\nu}$ で表すと

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \tag{6.89 a}$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\alpha\beta}(L^{-1})^\alpha{}_\mu(L^{-1})^\beta{}_\nu \qquad (L^{-1} = \eta L^t \eta) \tag{6.89 b}$$

$F_{\mu\nu}$ が2階共変テンソルで，(6.89 b) の変換をうけることは (6.60) の

$$d\omega = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

がローレンツ不変であることからも導かれる．ローレンツ変換後の量を ′ をつ

けて表すと

$$d\omega' = \frac{1}{2}F'_{\mu\nu}dx'^{\mu} \wedge dx'^{\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{6.90}$$

反変ベクトル dx^{μ} の変換 $dx'^{\mu}=L^{\mu}{}_{\nu}dx^{\nu}$ を上式に代入すると

$$F'_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = F_{\alpha\beta}dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}.$$

よって

$$F'_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta} = F_{\alpha\beta} \tag{6.91}$$

を得る．この両辺に $(L^{-1})^{\alpha}{}_{\lambda}(L^{-1})^{\beta}{}_{\rho}$ を乗じて和をとると，(6.89 b) となる．(6.89 a) の方は $*d\omega$ がローレンツ不変であることを用いれば，同様に導かれる．

次に $F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}$ が回転を伴わない $\boldsymbol{\beta}$ 方向のローレンツ変換 $L(\boldsymbol{\beta})$ でどのように変換されるかを具体的に求めてみよう．$L(\boldsymbol{\beta})$ には (3.8) の行列を用い，また (3.19) により，$L^{-1}(\boldsymbol{\beta})=\eta L^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\beta})\eta = L(-\boldsymbol{\beta})$ を用いる．

計算が長くなるので，結果のみ示す．3次元ベクトルを太字で表すが，その際，次のように定義する．

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \beta^2, \beta^3), \quad \boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3) = (-E^1, -E^2, -E^3),$$
$$\boldsymbol{B} = (B^1, B^2, B^3) = (B_1, B_2, B_3) \tag{6.92}$$

および

$$\begin{aligned} E_i &= cF_{i0}, \quad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \\ E^i &= cF^{i0}, \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}. \end{aligned} \tag{6.93}$$

すると次の変換式となる．

$$\boldsymbol{E}' = \lambda\left\{\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})(\lambda^{-1}-1) + c\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}\right\}, \tag{6.94 a}$$

$$\boldsymbol{B}' = \lambda\left\{\boldsymbol{B} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B})(\lambda^{-1}-1) - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\right\}, \tag{6.94 b}$$

$$\lambda^{-1} \equiv \sqrt{1-\beta^2}.$$

ただし，上式で3次元スカラー積とベクトル積は

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E} = \sum_i \beta^i E_i, \quad (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E})^k = \beta^i E_j - \beta^j E_i,$$

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_i \beta^i B^i, \quad (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B})_k = \beta^i B^j - \beta^j B^i,$$

である．

このように，電場と磁束密度はローレンツ変換で相互に入り組む．特に，電荷が静止している座標系では電場しか存在しないが，運動系でそれを観測すると，電場と磁束密度が現れる．

特に，x^1 方向速度 v のローレンツ変換の場合，(6.94) は次のように簡単になる．

$$E'_1 = E_1,\quad E'_2 = \lambda(E_2 - vB^3),\quad E'_3 = \lambda(E_3 + vB^2),$$
$$B'^1 = B^1,\quad B'^2 = \lambda\left(B^2 + \frac{v}{c^2}E_3\right),\quad B'^3 = \lambda\left(B^3 - \frac{v}{c^2}E_2\right). \tag{6.95}$$

6-8 電磁場内での電荷の運動方程式

マクスウェル方程式は，電荷電流密度と電磁場の相互の関係を与える．すなわち，電荷電流分布が与えられれば，全空間の電磁場がそれから決定されるし，逆に全空間での場が与えられれば，電荷電流分布が決定される．しかし，電荷電流密度分布が時間とともに，どう変るかを決定する運動方程式ではない．したがって，電磁気学としてはマクスウェル方程式のみでは不十分であり，電荷の運動を規定する運動方程式と合せて完全な理論となる．

質量を有する電荷の運動方程式は，もちろん，5-2 節で導いた相対論的方程式であるが，その中に現われる力 F^μ あるいはニュートン的力 f^μ の表式を与えなければ，運動方程式として役をなさない．それゆえ，電磁気力を求め，運動方程式を導こう．

ローレンツ変換の下で共変な運動方程式は (5.10) の

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu,\qquad p^\mu = mU^\mu = m\lambda\beta^\mu c \tag{6.96}$$

である．

いま，点電荷 q の運動を考えることにし，例によって，瞬間的に電荷とともに運動する慣性系 O′ をとると，O′ 系ではその瞬間には速度 $\boldsymbol{u}'$ は 0 であるから，ミンコフスキー力 F'^μ とニュートン的力 f' は一致する．そして，電荷に働らく力はクーロン電気力のみである．

$$F'^i = f'^i = -qE'^i = -cqF'^{i0}(=qE'_i) \tag{6.97}$$

F^μ は4元ベクトルであるから，O′系から基準系Oに移るとき，ローレンツ変換

$$F^\mu = L^\mu{}_\nu(-\boldsymbol{\beta})F'^\nu \tag{6.98}$$

をうける．$\boldsymbol{\beta}$ はO系での点電荷の速度である．O′系での4元速度 U'^μ は $\boldsymbol{\beta}'=0$ であるから

$$U'^\mu = \lambda(\beta')u'^\mu = (c, 0, 0, 0).$$

それゆえ，(6.97) は場 $F^{\mu\nu}$ を用いて次のように表される．

$$F'^i = -qU'_0F'^{i0} - qU'_kF'^{ik} = -j'_\mu F'^{i\mu} \tag{6.99 a}$$

j^μ は4元電流 (6.11) である．さらに，$F^0=\lambda f^0$ の変換は (5.15) と (6.97) により

$$F'^0 = \lambda'(\boldsymbol{\beta}'\cdot\boldsymbol{f}') = q\boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{E}' = j'^kF'_{k0} = -j'_\mu F'^{0\mu} \tag{6.99 b}$$

(6.99 a, b) をまとめると

$$F'^\mu = -j'_\nu F'^{\nu\mu} \tag{6.99 c}$$

となる．このように書くと，F'^μ が4元ベクトルであることが見やすいだろう．上式から反変4元ベクトル F'^μ はO系に移ると次のようになると予想される．

$$F^\mu = -j_\nu F^{\mu\nu} \tag{6.100}$$

これが一般の速度 $\boldsymbol{\beta}$ で運動している点電荷（あるいは電荷密度）に作用する4元力とみなされる．これを $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いて改めて書き下すと

$$\begin{aligned} F^i &= -j_0F^{i0} - j_kF^{ik} = -\lambda q(E^i - u_k\epsilon^{ikj}B_j) \\ &= -\lambda q(E^i + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})^i) = \lambda q[E_i + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})_i], \end{aligned} \tag{6.101 a}$$

$$F^0 = -j_iF^{0i} = \lambda q\frac{u_i}{c}E^i = q\lambda(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{F} \tag{6.101 b}$$

となる．最後の式の変形で，(6.101 a) より，$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})=0$ であるから

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{F} = \lambda\rho(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) \tag{6.102}$$

となることを用いた．

ミンコフスキー力に代ってニュートン力は，(6.101) の両辺に λ^{-1} を乗じて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}), \\ f^0 &= (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{f}) = q(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) \end{aligned} \tag{6.103}$$

となる．この第1式はよく知られたローレンツ力であり，cf^0 は5-3節で得た仕事率と一致する．この力の表式と（6.96）から

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}), \quad \frac{dp^0}{dt} = q(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E}) \tag{6.104}$$

を得る．

以上の式の導出を微分形式を用いて表してみよう．まず，（6.100）の右辺の表式を求める．この式は j_ν と $F^{\mu\nu}$ の縮約であるから，（6.49）の表式から推測できるように，$j_\mu dx^\mu$ と $*\omega = *d\alpha$ との外積で表される．実際に，（6.56）と（6.49）から

$$\begin{aligned} j \wedge *d\alpha &= j_\kappa dx^\kappa \wedge \frac{1}{4}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}dx^\nu \wedge dx^\rho \\ &= \frac{1}{4}j_\kappa \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}dx^\kappa \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \end{aligned}$$

これに（6.54）を適用し，（6.53）を用いると

$$\begin{aligned} j \wedge *d\alpha &= \frac{1}{4}j_\kappa F^{\lambda\mu}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\epsilon^{\nu\rho\kappa\tau}d\sigma_\tau \\ &= F^{\mu\nu}j_\nu d\sigma_\mu \end{aligned} \tag{6.105}$$

運動方程式（5.10）は

$$\pi \equiv \frac{dp_\mu}{d\tau}dx^\mu = F_\mu dx^\mu \tag{6.106}$$

と書くことができる．また，（6.57）に示したように1形式の双対形式は

$$*F_\mu dx^\mu = F^\mu d\sigma_\mu = -F^{\lambda\nu}j_\nu d\sigma_\mu \tag{6.107}$$

であるから，結局運動方程式（6.106）は（6.105）と（6.107）を用いて

$$*\pi = \frac{dp^\mu}{d\tau}d\sigma_\mu = F^\mu d\sigma_\mu = -j \wedge *d\alpha = -F^{\mu\nu}j_\nu d\sigma_\mu \tag{6.108}$$

と表すことができる．あるいは

$$\pi = -*(j \wedge *d\alpha)$$

とも表される．

以上のように，電磁気学のマクスウェル方程式と荷電粒子の運動方程式は，微分形式を用いて整った形式にまとめることができることがわかった．

7章　作用積分の変分原理

7-1　荷電粒子と電磁場の作用積分

これまで，相対論の運動法則や電磁気理論の4次元定式化を微分形式を用いて行ってきた．その方法はそれらの対象を別々に扱い，しかも発見法的なものであった．しかし，解析力学でよく知られているように，力学法則はラグランジュ関数を用いた作用積分と，変分法を適用した最小作用の原理から統一的に導かれる．それゆえ，本章では相対論的ラグランジュ関数を作り，それをもとに諸法則を統一的に導出することにしよう．

まず，質点系の相対論的ラグランジュ関数を求めよう．ラグランジュ関数 L を積分した作用積分はローレンツ変換で不変であること，また運動方程式は時間 t，あるいは固有時間 τ の2階微分の式であるから，L は力学変数の1階微分までを含むという条件がつく．最小作用の原理から質点の運動方程式を導くのであるから，光の進路に関するフェルマーの原理との類推で，質点の世界線(4次元径路)の長さに比例したものを作用積分とすればよいだろう．そこで，(2.1) の世界距離の表式を用いて，自由質点の作用積分を次式で定義する（簡単化のため1粒子系とするが，多粒子系の場合は各粒子の和をとればよいので拡張は容易である．

$$S_{\mathrm{m}} = -\int_{s_1}^{s_2} mcds = -\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} \tag{7.1}$$

（この dx^{μ} は外微分ではない）

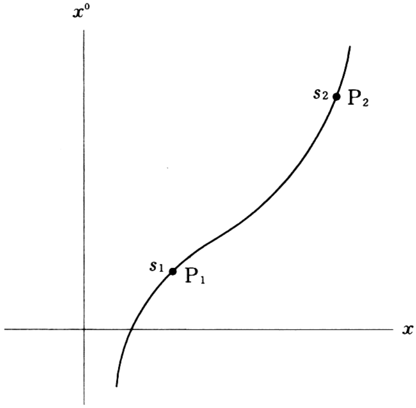


図 7.1　質点の世界線

係数 $(-mc)$ は質点の速度が遅いとき，積分の中が，$(mv^2/2+$ 定数$)dt$ となるように選んだ．s_1, s_2 および P_1, P_2 は世界線上の 2 点に対応する．

質点系の作用積分は，通常時間積分で表すから，

$$S_{\mathrm{m}} = \int_{t_1}^{t_2} L_{\mathrm{m}} dt = \int -mc^2\sqrt{1-\beta^2}\,dt, \qquad \left(\beta=\frac{u}{c}\right) \tag{7.2}$$

によってラグランジュ関数を定義することができる．しかし，4 次元形式を保つために，時間を特殊化せず，空間と同列に扱いたい．そのために時間とは一応独立なパラメーター z を形式的に導入し，変分をとった後で，z を時間 x^0 あるいは固有時間 τ などに適宜おき替えるのがよい．そうすると 4 次元形式の方程式が得られる．そこで，z による x^μ の微分を $\dot{x}^\mu$ で表し，作用積分を

$$S_{\mathrm{m}} = -\int_{z_1}^{z_2} mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}\,dz, \qquad (\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/dz) \tag{7.3}$$

とする．

次に，電磁場と荷電粒子との相互作用積分 S_{int} と電磁場の作用積分 S_{f} を定めるのであるが，全作用積分

$$S = S_{\mathrm{m}} + S_{\mathrm{int}} + S_{\mathrm{f}} \tag{7.4}$$

を，荷電粒子の位置座標 x^μ で変分すれば運動方程式 (6.96) または (6.104) が導かれ，ポテンシャル A_μ で変分すればマクスウェル方程式 (6.30) または (6.58) が導かれるように S_{int} と S_{f} を決める．そのような作用積分は (6.35)

の1形式 α によって次式で与えられることが分っている。

$$S_{\text{int}} = \frac{1}{c}\int \alpha \wedge *j = \frac{1}{c}\int A_\mu j^\mu d\Sigma, \tag{7.5}$$

$$S_{\text{f}} = -\frac{c\varepsilon_0}{2}\int * d\alpha \wedge d\alpha = -\frac{c\varepsilon_0}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d\Sigma. \tag{7.6}$$

ここで $d\Sigma \equiv dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ は4次元体積要素である。(7.5), (7.6) の積分は空間のある領域にわたってなされる。

(7.6) の最右辺の表式は次のように得られる。まず (6.36) と (6.49) により

$$* d\alpha \wedge d\alpha = d\alpha \wedge * d\alpha = \frac{1}{8}\epsilon_{\lambda\rho\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\sigma\tau}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau. \tag{7.7}$$

ここで4形式 $dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau$ の μ, ν, σ, τ はすべて異なるから，符号を除いて $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ であり，その符号は添字が $0, 1, 2, 3$ からの置換の偶奇に従って $\pm$ である。よって

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma \wedge dx^\tau = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{7.8}$$

である（右辺の負付号は (4.26b) の定義による）。(7.8) を (7.7) に代入し，(6.53) を適用すると (7.6) の右辺を得る。

4次元体積要素（方向付けられた）$d\Sigma$ はローレンツ変換の不変量であることを注意しておく。(7.5) や (7.6) で，α, j はローレンツ不変な1形式であり，$A_\mu j^\mu$, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ もローレンツ不変であるから $d\Sigma$ も不変量であることは明らかである。直接それを確めることも容易である。すなわち，ローレンツ変換

$$dx'^\mu = L^\mu{}_\nu dx^\nu$$

により

$$\begin{aligned} d\Sigma' &= dx'^0 \wedge dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 \\ &= L^0{}_\lambda L^1{}_\mu L^2{}_\nu L^3{}_\rho dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \end{aligned}$$

この式で添字 λ, μ, ν, ρ は完全反対称であるから，4つの $L^0{}_\mu$ などの積は L の行列式である。よって

$$d\Sigma' = \det(L)\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \pm d\Sigma. \tag{7.9}$$

ただし，上式で L は時間，空間反転のない本義ローレンツ変換なら + 符号，反転のある場合は − 符号となる。

7-2　ハミルトンの最小作用の原理

さて，いよいよ作用積分 (7.4) から，運動方程式とマクスウェル方程式を導こう．まず，荷電粒子の運動方程式であるが，S_{f} は電磁場のみで電流は含まれないので，作用積分としては S_{m} と S_{int} のみ考えればよい．S_{int} の中の j^{μ} は荷電粒子のつくる 4 元電流であるから，S_{m} の中の $\dot{x}^{\mu}$ と本質的に同じものである．そこで S_{int} を S_{m} に合せるように書き直す．電荷 q の存在する座標を $x_q{}^{\mu}$ で表し，電磁場の x^{μ} と区別する．x^{μ} は電荷の存在しない所にも存在するからである．S_{int} の電流密度 $j^{\mu}(x)$ は

$$j^{\mu}(x) = cq\beta^{\mu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q) = cq\frac{dx^{\mu}}{dx^0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q). \tag{7.10}$$

ここに，$\delta(\boldsymbol{x})$ は 3 次元デルタ関数である．こうして (7.5) の空間積分を行うと

$$S_{\mathrm{int}} = \frac{1}{c}\int A_{\mu}(x)j^{\mu}(x)\,d\Sigma = \int qA_{\mu}(x_q)\,dx_q{}^{\mu} \tag{7.11}$$

となる．したがって $x_q{}^{\mu}$ の変分には

$$S_{\mathrm{m}}+S_{\mathrm{int}} = \int_{z_1}^{z_2}[-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_q{}^{\mu}\dot{x}_q{}^{\nu}}+qA_{\mu}(x_q)\,\dot{x}_q{}^{\mu}]dz \tag{7.12}$$

を用いる．

(7.12) を荷電粒子の座標変数 $x_q{}^{\mu}$ で変分したものを 0 とおくのが最小作用の原理である．

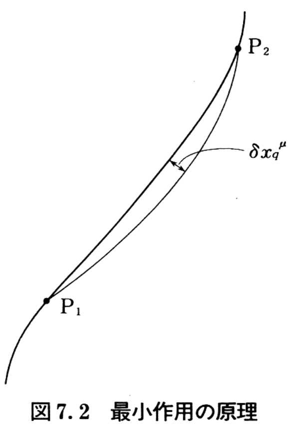


図 7.2　最小作用の原理

$$\delta(S_{\rm m}+S_{\rm int}) = \int_{z_1}^{z_2}\left[-mc\frac{\dot{x}_{q\mu}\delta\dot{x}_q{}^\mu}{\sqrt{\dot{x}_q{}^\nu\dot{x}_{q\nu}}}+q\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_q{}^\mu}\delta x_q{}^\mu\dot{x}_q{}^\nu+A_\mu\delta\dot{x}_q{}^\mu\right)\right]dz.$$

変分 δ と z の微分は独立ゆえ，交換可能である．よって

$$\therefore \qquad \delta\dot{x}_q{}^\mu = \frac{d}{dz}\delta x_q{}^\mu.$$

それゆえ，上式において，z の微分を部分積分して変形すると

$$\delta(S_{\rm m}+S_{\rm int}) = \int_{z_1}^{z_2}\left[mc\frac{d}{dz}\left(\frac{\dot{x}_{q\mu}}{\sqrt{\dot{x}_q{}^\nu\dot{x}_{q\nu}}}\right)\delta x_q{}^\mu+q\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_q{}^\mu}\dot{x}_q{}^\nu-\frac{dA_\mu}{dz}\right)\delta x_q{}^\mu\right]dz$$
$$-\left(mc\frac{\dot{x}_{q\mu}}{\sqrt{\dot{x}_q{}^\nu\dot{x}_{q\nu}}}-qA_\mu\right)\delta x_q{}^\mu\Big|_{z_1}^{z_2} \qquad (7.13)$$

となる．ラグランジュ運動方程式を導くハミルトンの最小作用の原理は，積分の始点 P_1 と終点 P_2 を固定し，途中の経路のみの変分をとるのであるから，(7.13) の最後の項は $\delta x_q{}^\mu(z_1)=\delta x_q{}^\mu(z_2)=0$ により落とし次式を得る．

$$\delta(S_{\rm m}+S_{\rm int}) = \int_{z_1}^{z_2}dz\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{mc\dot{x}_{q\mu}}{\sqrt{\dot{x}_q{}^\nu\dot{x}_{q\nu}}}\right)+q\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_q{}^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_q{}^\nu}\right)\dot{x}_q{}^\nu\right]\delta x_q{}^\mu = 0.$$
$$(7.14)$$

変分 $\delta x_q{}^\mu$ は任意であるから (7.14) の [ ] の中が 0 でなければならない．よって（以下添字 q を省略してとる）

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu}}\right)+qF_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\nu = 0 \qquad (7.15)$$

を得る．ここで，パラメーター z を x^0 とおくと

$$\frac{d}{dx^0}(mc\beta^\mu\lambda)+qF_{\mu\nu}(x)\beta^\nu = 0. \qquad (7.16)$$

両辺を λ で割れば

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -F_{\mu\nu}j^\nu \quad \text{あるいは} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = -F^\mu{}_\nu j^\nu \qquad (7.17)$$

となる．上式の変形で p^μ として (5.9)，j^μ として (6.10) を用いた．(7.17) が (6.106) に対応するものである．この 4 次元形式の運動方程式は (7.3) の $S_{\rm m}$ を用いたから得られたのであって，(7.2) を用いたのでは $\mu=0$ の時間成分の式は導かれない．

では次に，$S_{\rm f}+S_{\rm int}$ の変分から場の方程式，すなわちマクスウェル方程式を導こう．今度は A_μ で変分するので (7.5) をそのまま使う．(7.6) の変分にお

いて

$$\begin{aligned}\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &= \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}\delta(F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}) = \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(\delta F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}+F_{\mu\nu}\delta F_{\lambda\rho}) \\ &= 2\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}F_{\mu\nu}\delta F_{\lambda\rho} = 2F^{\lambda\rho}\delta\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho}\right) \\ &= 2F^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial\delta A_\rho}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\delta A_\lambda}{\partial x^\rho}\right) = 4F^{\lambda\rho}\frac{\partial\delta A_\rho}{\partial x^\lambda}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

最後のところでは2項目の λ と ρ を置きかえ，$F^{\lambda\rho}$ の反対称性を用いた．また δ と $\partial/\partial x^\lambda$ は独立ゆえ，入れかえた．部分積分により（7.18）は

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 4\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(F^{\lambda\rho}\delta A_\rho)-4\frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^\lambda}\delta A_\rho \tag{7.19}$$

となる．これを用いて（7.6）の部分は

$$\delta S_{\mathrm{f}} = c\varepsilon_0\int d\Sigma\left[\frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^\lambda}\delta A_\rho-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(F^{\lambda\rho}\delta A_\rho)\right] \tag{7.20}$$

となる．S_{int} の A_μ による変分は

$$\delta S_{\mathrm{int}} = \frac{1}{c}\int d\Sigma\ j^\mu\delta A_\mu. \tag{7.21}$$

（7.20）の第2項，4次元発散の項は4次元のガウスの定理により表面積分（3次元積分）に書き直せる（4-5節の（4.72）または（4.76）の4次元版）．

$$\int_\Sigma d\Sigma\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(F^{\lambda\rho}\delta A_\rho) = \int_{\partial\Sigma=\sigma}d\sigma_\lambda(F^{\lambda\rho}\delta A_\rho). \tag{7.22}$$

ここに $d\sigma_\lambda$ は（6.47）で導入された3形式である．変分は例によって表面 $\partial\Sigma=\sigma$ 上では0とするので，（7.22）は落ちる．よって最小作用の原理は

$$\delta(S_{\mathrm{f}}+S_{\mathrm{int}}) = \int d\Sigma\left[c\varepsilon_0\frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^\lambda}+\frac{1}{c}j^\rho\right]\delta A_\rho = 0 \tag{7.23}$$

となる．変分 δA_ρ は任意であるから，上式の[　]は0である．

$$c\varepsilon_0\frac{\partial F^{\rho\lambda}}{\partial x^\lambda}-\frac{1}{c}j^\rho = 0.$$

この式は $\varepsilon_0\mu_0=c^{-2}$ を用いて

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu \tag{7.24}$$

となる．これはマクスウェル方程式に他ならない．こうして，作用積分（7.4）～（7.6）は荷電粒子と電磁場の力学系を記述するに必要十分であることが分った．

7-3 対称性と保存則——ネーターの定理

作用積分には力学系に関するいろいろな情報が含まれている．作用積分を不変にするような力学変数の変換に対して１つの保存量が存在することは，ネーターの定理としてよく知られている．

質点系の場合のラグランジュ関数を $L(x_a{}^\mu, \dot{x}_a{}^\mu)$ とする．a は粒子の番号，$\dot{x}^\mu$ は例によってパラメータ z による微分 dx^μ/dz とする．L の変分を (7.3) の変分と同様に求める．

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta \dot{x}_a{}^\mu + \frac{\partial L}{\partial x_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu \right)$$

$$= \sum_a \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu \right) - \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_a{}^\mu} \right) \delta x_a{}^\mu \right]$$

$$\therefore \quad \delta \int L dz = \int dz \sum_a \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu \right) - \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_a{}^\mu} \right) \delta x_a{}^\mu \right] \tag{7.25}$$

となる．上式の最後の（　）の中は z を時間にすればラグランジュの運動方程式の左辺である．したがって，もし L が変換

$$x_a{}^\mu \longrightarrow x_a{}^\mu + \delta x_a{}^\mu \tag{7.26}$$

の下で不変ならば，運動方程式

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x_a{}^\mu} = 0 \tag{7.27}$$

の径路上で (7.25) は

$$\delta S = \int \delta L dz = \int dz \frac{d}{dz} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu \right) = 0 \tag{7.28}$$

となる．この式で積分領域は任意であるから，

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu \right) = 0 \tag{7.29}$$

を得る．すなわち，$z=t$ とおくと，運動方程式 (7.27) の上で，(7.29) は保存則を与え，その保存量は

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} \delta x_a{}^\mu = \text{一定} \tag{7.30}$$

である．上式の $\dot{x}^\mu$ は dx^μ/dt である．これが質点系などの有限自由度の力学

系のネーターの定理である．

この結果を，(7.3) の S_{m} に適用してみよう．S_{m} は $\dot{x}^{\mu}$ しか含まないので，変換

$$x_a{}^{\mu} \rightarrow x_a{}^{\mu} + h^{\mu}, \quad (h^{\mu} \text{ は 定数}) \quad \therefore \quad \dot{x}_a{}^{\mu} \longrightarrow \dot{x}_a{}^{\mu} \tag{7.31}$$

に対して S_{m} は明らかに不変である．この変換で h^{μ} は各粒子に共通だから座標原点を h^{μ} だけ移動させたものである．よって (7.30) で $\delta x_a{}^{\mu} = h^{\mu}$ とおいて

$$h^{\mu} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^{\mu}} = -h^{\mu} \sum_a \frac{m_a c \eta_{\mu\nu} \dot{x}_a{}^{\nu}}{\sqrt{\dot{x}_a{}^{\lambda} \dot{x}_{a\lambda}}} = \text{一定}. \tag{7.32}$$

4つの $h^{\mu}(\mu=0\sim3)$ は独立であるので，(7.32) は μ ごとに4つの独立な保存則を与えるが，h^{μ} は定数であるから h^{μ} で除しても右辺は定数である．こうして次の保存則を得る．

$$\sum_a \frac{m_a \dot{x}_a{}^{\nu}}{\sqrt{\dot{x}_a{}^{\lambda} \dot{x}_{a\lambda}}} = \sum_a p_a{}^{\nu} = \text{一定}. \tag{7.33}$$

これは (5.30) の保存則に他ならない．座標原点をずらしても L が不変であることは時空間の一様性を意味する．すなわち，時間・空間の一様性（一種の対称性）がエネルギー・運動量保存則に対応している．

また，ローレンツ変換の下で S_{m} は不変であるから，別の保存則が導かれる．いま微小ローレンツ変換（相対速度 v が微小）を考え

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}) x^{\nu}, \quad \therefore \quad \delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{7.34}$$

と表す．$\omega^{\mu}{}_{\nu}$ は微小量である．この変換で $\dot{x}^{\mu}$ も x^{μ} と同様の変換をうけるので，$\omega_{\mu\nu}$ の1次までとり2次以上を無視すると，S_{m} の根号の中は

$$\begin{aligned}
\delta(\eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}) &= \eta_{\mu\nu} (\delta \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} + \dot{x}^{\mu} \delta \dot{x}^{\nu}) \\
&= \eta_{\mu\nu} (\omega^{\mu}{}_{\lambda} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\nu} + \dot{x}^{\mu} \omega^{\nu}{}_{\lambda} \dot{x}^{\lambda}) = \omega_{\nu\lambda} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\nu} + \omega_{\mu\lambda} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\lambda} \\
&= (\omega_{\mu\lambda} + \omega_{\lambda\mu}) \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\mu}.
\end{aligned} \tag{7.35}$$

(7.34) はローレンツ変換であるから，$\eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$ は不変，すなわち (7.35) は0である．したがって，次の式が (7.34) がローレンツ変換であるための条件である．

$$\omega_{\mu\lambda} + \omega_{\lambda\mu} = 0, \qquad \therefore \quad \omega_{\lambda\mu} = -\omega_{\mu\lambda}. \tag{7.36}$$

$\omega_{\mu\nu}$ は μ, ν につき反対称であるならば，S_{m} は不変となる．よってネーターの定理 (7.30) から

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu}\omega^\mu{}_\nu x_a{}^\nu = \omega^\mu{}_\nu \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} x_a{}^\nu = \omega^{\mu\nu}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} x_{a\nu} = 一定$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu}x_{a\nu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\nu}x_{a\mu}\right) = 一定 \tag{7.37}$$

となる.

$\omega^{\mu\nu}$ は $x_a{}^\mu$ によらない定数であるから, (7.37) より保存則

$$\sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu}x_{a\nu} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\nu}x_{a\mu}\right) = 一定 \tag{7.38}$$

を得る. この式に (7.3) からの

$$L = -\sum_a m_a c\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_a{}^\mu \dot{x}_a{}^\nu}$$

を代入すると (z を x^0 として $\dot{x}^\mu = \beta^\mu$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a{}^\mu} = -m_a c\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}_a{}^\nu}{\sqrt{\eta_{\lambda\rho}\dot{x}_a{}^\lambda \dot{x}_a{}^\rho}} = -cm_a\frac{\eta_{\mu\nu}\beta^\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\eta_{\mu\nu}p_a{}^\nu$$
$$= -p_{a\mu} \tag{7.39}$$

であるから, (7.38) は

$$\sum_a (x_{a\mu}p_{a\nu} - x_{a\nu}p_{a\mu}) \equiv \Omega_{\mu\nu} = 一定 \tag{7.40 a}$$

または

$$\sum_a (x_a{}^\mu p_a{}^\nu - x_a{}^\nu p_a{}^\mu) \equiv \Omega^{\mu\nu} = 一定 \tag{7.40 b}$$

となる. この $\Omega^{\mu\nu}$ は1粒子の場合すでに (5.48) で定義されたもので, よく知られた3次元角運動量 L_k

$$\Omega^{ij} = \sum_a x_a{}^i p_a{}^j - x_a{}^j p_a{}^i = \sum_a \epsilon^{ijk}L_{ak} \tag{7.41}$$

を4次元に拡張したものであり, $\Omega^{\mu\nu}$ は4元全角運動量である. したがって, (7.40 b) は角運動量保存則である.

ローレンツ変換のパラメータ $\omega^\mu{}_\nu$ の添字を揃えた $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ は, 5-6節で示したように x^μ と x^ν 軸のつくる平面内の微小回転角を表す. ローレンツ変換は虚数時間 $ix^0 = x^4$ を用いると, x^0 軸と x^i 軸の回転で表すことができる. なぜならば $(\Delta s)^2 = \sum_{\alpha=1}^4 (\Delta x^\alpha)^2$ は4次元ユークリッド空間の長さを表すから, これを不変にする1次変換は座標軸の回転だからである.

先に求めた空間回転を伴わないローレンツ変換 (3.8) に対応する微小ローレンツ変換を導き, $\omega^\mu{}_\nu$ の具体的表式を求めてみよう. $\beta^\mu = u^\mu/c$ を無限小とし,

β^μ の1次まで残すと（5.58）と同じ

$$L(\boldsymbol{\beta} \ll 1) \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\beta^1 & -\beta^2 & -\beta^3 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.42}$$

となる．よって，（7.34）とこの行列表示より

$$\begin{aligned} &\omega^0{}_i = \omega^i{}_0 = -\beta^i = -\beta^0\beta^i, \quad (\beta^0=1) \\ &\omega^i{}_j = 0, \quad \omega^0{}_0 = 0 \end{aligned} \tag{7.43}$$

である．これは以前求めた（5.60）と同じである．これより，ω の添字を下げて（空間成分 i を下げたときのみ符号が変る）

$$\begin{aligned} &\omega_{0i} = \omega^0{}_i = -\beta^0\beta^i, \quad \omega_{i0} = -\omega^i{}_0 = \beta^i\beta^0, \\ &\omega_{ij} = 0, \quad \omega_{00} = 0. \end{aligned} \tag{7.44}$$

このように $\omega_{\mu\nu}$ は反対称であり，ローレンツ変換は x^0-x^i 平面内の（擬似）回転である．そして ω_{0i} は x^0-x^i 平面の微小回転角に対応する．

（7.42）により，微小ローレンツ変換を表すと

$$\begin{aligned} \Delta x'^0 &= \Delta x^0 - \sum_i \beta^i \Delta x^i = \Delta x^0 + \sum_i \omega_{0i}\Delta x^i \\ &= \Delta x^0 \cosh \omega_{0i} + \sum_i \Delta x^i \sinh \omega_{0i}, \\ \Delta x'^i &= -\beta^i \Delta x^0 + \Delta x^i = -\omega_{i0}\Delta x^0 + \Delta x^i \\ &= \Delta x^0 \sinh \omega_{0i} + \Delta x^i \cosh \omega_{0i}. \end{aligned}$$

ただし，ω_{0i} は微小量であるので，

$$\cosh \omega_{0i} = \cosh \omega_{i0} \simeq 1, \quad \sinh \omega_{0i} = -\sinh \omega_{i0} \simeq \omega_{0i}$$

とした．上式は一見，微小角 ω_{0i} の回転に対応するとみられるが，$\Delta x'^i$ の右辺の $\sinh \omega_{0i}$ の符号が，通常のユークリッド空間の回転の場合と逆である．それは x^0 と x^i の計量が逆符号のため，擬似ユークリッド空間となっているためである．

7-4　場の理論におけるネーターの定理

電磁場に対しても，類似の保存則が導かれる．一般に場の理論の場合に，場

の量を $\phi_r(x)$ で表し，r は場のベクトル成分，あるいは種類（電磁場やスカラー場など）をまとめて示したもので場の独立成分を表す（スカラー場は単に ϕ である）．また

$$\phi_{r,\mu} \equiv \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\mu}$$

と略記することにする．ラグランジュ関数を $L(\phi_r, \phi_{r,\mu})$ の作用積分は

$$S_{\mathrm{f}} = \frac{1}{c}\int L(\phi_r, \phi_{r,\mu})\, d\Sigma \tag{7.45}$$

とする．c^{-1} の因子は通常 L の定義は積分を $d\Sigma$ でなく $d\Sigma/c = d\sigma_0 \wedge dt$ とするからである．

この S_{f} が ϕ_r の変分

$$\phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \tag{7.46}$$

に対して不変であるとしよう．すると

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{f}} &= \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\delta\phi_{r,\mu}\right)d\Sigma \\ &= \frac{1}{c}\int\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\right)\delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\delta\phi_r\right)\right]d\Sigma = 0\end{aligned} \tag{7.47}$$

上式では，例によって $\delta\phi_{r,\mu} = \partial(\delta\phi_r)/\partial x^\mu$ を用いた．

(7.47) で，第 1 項はラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\right) = 0 \tag{7.48}$$

の左辺であるから，運動方程式の上で第 2 項は 0 である．よって次式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\delta\phi_r\right) = 0. \tag{7.49}$$

これが，場の理論におけるネーターの定理である．

(7.49) は 4 次元発散が 0 となる式であるから，4 元電流の連続の方程式 (6.3) から電荷 Q の保存 (6.5) を導いたように，積分曲面 S 上で $\phi_r = 0$ であれば

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,0}}\delta\phi_r\right)d\sigma_0 = -\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,i}}\delta\phi_r\right)d\sigma_0 = -\int_S \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,i}}\delta\phi_r dS_i = 0 \tag{7.50}$$

となるので，左辺の積分量は保存することがわかる．したがって (7.49) を保存則という．

電磁場の理論はゲージ変換（6.67）の下で不変であった．それゆえ，場の作用積分 S_{f} もこのゲージ変換によって不変であることが期待される．事実，(6.68) で示したように $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変量であるから，(7.6) の S_{f} はゲージ変換で不変である．

電磁場のラグランジュ関数

$$L_{\mathrm{f}} = -\frac{c^2\varepsilon_0}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{7.51}$$

に，$\phi_r = A_\mu$ として，(7.49) を適用しよう．

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\rho}} &= -\frac{c^2\varepsilon_0}{4}\left[\left(\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\rho}}F_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\rho}}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta})\right]\\ &= -\frac{c^2\varepsilon_0}{4}\left[F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\rho}}F_{\mu\nu} + F^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\rho}}F_{\alpha\beta}\right] = -\frac{c^2\varepsilon_0}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\lambda,\rho}}\\ &= -\frac{c^2\varepsilon_0}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\rho}}(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = -\frac{c^2\varepsilon_0}{2}F^{\mu\nu}(\delta^\lambda_\nu\delta^\rho_\mu - \delta^\lambda_\mu\delta^\rho_\nu)\\ &= -\frac{c^2\varepsilon_0}{2}(F^{\rho\lambda} - F^{\lambda\rho}) = c^2\varepsilon_0 F^{\lambda\rho}.\end{aligned} \tag{7.52}$$

また，(6.67) により

$$\delta A_\lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\lambda} \tag{7.53}$$

であるから，(7.49) は次の保存則を与える．

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(F^{\lambda\mu}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\lambda}\right) = 0. \tag{7.54}$$

実際に，(7.54) が電荷のない自由場の運動方程式

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

の下で成立することを示すのは容易である．

$$(7.54) = \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^\mu}\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\lambda} + F^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}.$$

第2項は $F^{\lambda\mu}$ が μ, ν につき反対称，$\partial^2\Lambda/\partial x^\lambda\partial x^\mu$ が対称であるから落ちるので上式は運動方程式のもとで 0 となる．

これまで相互作用の S_{int} を無視して，自由粒子系と自由場の系の保存則を別々に導いた．S_{int} の中の

$$L_{\text{int}} = \frac{1}{c} A_\mu j^\mu, \quad \text{または} \quad qA_\mu \dot{x}^\mu$$

はゲージ変換（7.53）のみでは不変でない．j^μ の方も同時に変換し，場の反作用も入るようにして L_{int} が不変になるようにしなければならない．それには x^μ に位相変換

$$x^\mu \to x^\mu e^{-i\Lambda(x)}$$

を施し，しかも粒子系の S_{m} を変更して全体でゲージ不変になるよう書き変えねばならない．これ以上のことは本書の目的を越えるので省略する．

7-5　エネルギー・運動量テンソル

エネルギー・運動量を統一的に扱うには，エネルギー・運動量テンソルという2階テンソルを用いるのが便利である．電磁場のエネルギー・運動量テンソルを求める前に，一般の場 $\phi_r(x)$ のラグランジュ関数（7.45）でやっておく．$L(\phi_r, \phi_{r,\mu})$ の微分を求めよう．

$$\begin{aligned} dL(\phi_r, \phi_{r,\mu}) &= \frac{\partial L}{\partial \phi_r} d\phi_r + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} d\phi_{r,\mu} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \phi_r} \phi_{r,\nu} dx^\nu + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} \frac{\partial \phi_{r,\mu}}{\partial x^\nu} dx^\nu. \end{aligned} \tag{7.55}$$

この第1項に ϕ_r に対するラグランジュ方程式（7.48）を代入すると

$$dL = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} \right) \phi_{r,\nu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} \frac{\partial \phi_{r,\mu}}{\partial x^\nu} \right] dx^\nu \tag{7.56}$$

上式の第2項で

$$\frac{\partial \phi_{r,\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \phi_{r,\nu}}{\partial x^\mu}$$

であるから，（7.56）の右辺は1つにまとめられて

$$dL = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu} \right) dx^\nu \tag{7.57}$$

となる．これより

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu} \right) = 0,$$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(-L\delta^\mu_\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\phi_{r,\nu}\right)=0 \tag{7.58}$$

を得る．これは一種の保存則を与えると解釈できる．

そこで，

$$T^\mu{}_\nu \equiv -L\delta^\mu_\nu+\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\phi_{r,\nu} \tag{7.59}$$

とおくと，(7.58) は，運動方程式を満たす範囲で，

$$\frac{\partial T^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu}=0,\quad \text{あるいは}\quad \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}=0 \tag{7.60}$$

と表される．ただし，

$$T^{\mu\nu}=\eta^{\nu\lambda}T^\mu{}_\lambda=-L\eta^{\mu\nu}+\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\eta^{\nu\lambda}\phi_{r,\lambda} \tag{7.61}$$

である．この $T^{\mu\nu}$ をエネルギー・運動量テンソルという．$T^{\mu\nu}$ の符号は T^{00} がエネルギーを与えるように選んだ．

$T^{0\mu}$ 成分の物理的意味を考察しよう．まず，T^{00} は

$$T^{00}=-L+\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,0}}\eta^{0\lambda}\phi_{r,\lambda}=-L+\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,0}}\phi_{r,0}. \tag{7.62}$$

これは，まさに解析力学で定義されるハミルトン関数密度 H に他ならない ($\partial L/\partial\phi_{r,0}$ は ϕ_r に対応する正準運動量である)．よって，T^{00} はエネルギー密度を表す．

次に，T^{0i} については

$$T^{0i}=\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,0}}(-\phi_{r,i}),\quad \text{あるいは}\quad T^0{}_i=\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,0}}\phi_{r,i} \tag{7.63}$$

であり，T^{0i} は場の運動量密度を与えることが示される．例えば，質点系の場合には，$\phi_r\to x_a{}^\mu$ (a は質点の番号) なので，$\phi_{r,i}$ は各粒子ごとに δ^μ_i となり

$$T^{0i}\longrightarrow \sum_i p_a{}^i$$

は系の全運動量である．

場の理論における一般的解釈は次のようにする．(7.60) の $\nu=0$ 成分を空間積分した

$$\int_\sigma \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial x^\mu}d\sigma_0=0$$

から

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int_\sigma T^{00}d\sigma_0 = -\int_\sigma \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i}d\sigma_0 = -\int_S T^{i0}dS_i \tag{7.64}$$

を得る．この式の左辺は体積 σ 内の全エネルギーの時間的変化率であるから，右辺は σ の表面 S を通って外部から流入する運動量と解釈できる．すると T^{i0} は dS_i を通り x^i 方向に流出する運動量密度ということになる．そして (7.60) はエネルギー・運動量保存則を表している．

$T^{\mu\nu}$ は対称テンソルであることをまだ示してないが，通常は対称化できることが証明される（後述）ので

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \tag{7.65}$$

を仮定する．そこで

$$P^\mu = \int_\sigma T^{\mu 0}d\sigma_0 = \int_\sigma T^{0\mu}d\sigma_0 \tag{7.66}$$

とおくと，P^μ はエネルギー・運動量の 4 元ベクトルと解釈できる．

次に (7.60) を 4 次元体積 Σ で積分すると

$$\int_\Sigma \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}d\Sigma = \int_{\partial\Sigma=\sigma} T^{\mu\nu}d\sigma_\mu = 0.$$

ここで Σ として x^0= 一定の無限超平面（3 次元全空間）σ^1, σ^2 で挟まれた領域をとってみよう（図 7.3）．すると σ^1, σ^2 上では x^0 が一定であるから，$dx^0=0$ である．よって $d\sigma_i=0$ となり，$d\sigma_0$ のみ残って，上式は

$$\int_{\sigma^1}^{\sigma^2} T^{0\nu}d\sigma_0 = P^\nu(\sigma^2) - P^\nu(\sigma^1) = 0 \tag{7.67}$$

となる．これは全エネルギー・運動量が時間的に一定であること，すなわち保

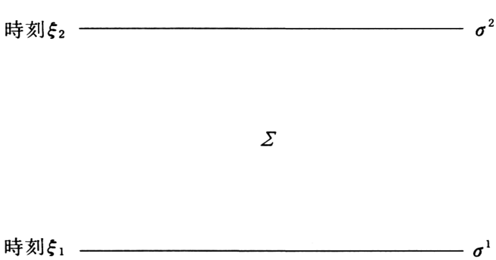


図 7.3 ミンコフスキー空間中の時刻一定の超平面

存量であることを表す．

(7.67) では特別な領域 Σ を選んだが，この式をローレンツ変換をして，一般の慣性系に移ると，$d\sigma_0$ のみでなく $d\sigma_i$ も 0 でなくなり，P^ν はより一般的には (7.66) に代り

$$P^\nu = \int T^{\mu\nu} d\sigma_\mu \tag{7.68}$$

と表される．(7.66)，または (7.68) は 4 元ベクトルの変換性を有することは右辺の表式から明らかである．よって，P^μ も 4 元ベクトルであり，P^0 がエネルギーであるから，P^i は運動量であることは，このことからもいえる．

$T^{\mu\nu}$ の空間成分 T^{ij} は応力テンソルを表すのであるが，詳細は省略する．

最後に，$T^{\mu\nu}$ は通常対称化しうることが証明されているのでその方法の筋道を示しておこう．$T^\mu{}_\nu$ の定義 (7.59) から推測できるように，L が $\phi_{r,\mu}$ の双2次形式でない限り，$T^{\mu\nu}$ は一般に対称テンソルでない．

(7.60) からわかるように，$T^{\mu\nu}$ には 4 次元発散の不定性があり，4 次元発散が 0 であるテンソルを加えても保存則は成立する．そこで

$$\varphi^{\lambda\mu,\nu} = -\varphi^{\mu\lambda,\nu}$$

なる任意関数を導入する．すると λ, μ につき反対称であるから

$$\frac{\partial^2 \varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = 0. \tag{7.69}$$

それゆえ

$$\tilde{T}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\lambda} \tag{7.70}$$

を改めてエネルギー・運動量テンソルとして採用しよう．(7.69) のゆえに

$$\frac{\partial \tilde{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{7.71}$$

を満たす．しかも，(7.68) で $\tilde{T}^{\mu\nu}$ のとき現われる付加項は

$$\begin{aligned}\int_\sigma \frac{\partial \varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\lambda} d\sigma_\mu &= \frac{1}{2}\int_\sigma \left(\frac{\partial \varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\lambda} d\sigma_\mu - \frac{\partial \varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\mu} d\sigma_\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2}\int_\sigma d * (\varphi_{\lambda\mu,}{}^\nu\, dx^\lambda \wedge dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial\sigma = S} * (\varphi_{\lambda\mu,}{}^\nu\, dx^\lambda \wedge dx^\mu)\end{aligned} \tag{7.72}$$

となる．上式で2番目から3番目の等式への変形は，すでに6-4節で行った公式を用い，ν を固定して各 ν ごとに類似の算法を行うことによってなされる．この移行はストークスの定理の4次元形である．3番目から4番目への移行は(4.76)を用いた．S は領域 σ を囲む閉曲面である．それゆえ，σ を充分大きくとり（保存則が成立するように大きな閉鎖系）表面 S 上で $\varphi_{\lambda\mu,}{}^{\nu}$ が消えるようにすると，(7.72) は0となり，(7.68) の P_μ には寄与しない．よって (7.70) の $\tilde{T}^{\mu\nu}$ は $T^{\mu\nu}$ と物理的に等価とみなせる．$T^{\mu\nu}$ は必ずしも対称である必要はないのだが，角運動量を $T^{\mu\nu}$ を用いて定義するとき，対称でなければ角運動量の保存則が成立しないのである（7-8節参照）．

では (7.70) の $\tilde{T}^{\mu\nu}$ が対称テンソルであるためには $\varphi^{\lambda\mu,\nu}$ はどのような関数であればよいのであろうか．$T^{\mu\nu}$ の定義式 (7.59)，(7.70) および

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu} \tag{7.73}$$

から，

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = -\frac{\partial\varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial\varphi^{\lambda\nu,\mu}}{\partial x^\lambda},$$

$$\therefore \quad \frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\mu}}\eta^{\nu\lambda}\phi_{r,\lambda} - \frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\nu}}\eta^{\mu\lambda}\phi_{r,\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\varphi^{\lambda\mu,\nu} - \varphi^{\lambda\nu,\mu}). \tag{7.74}$$

この条件式を満たす $\varphi^{\mu\nu\lambda}$ が存在することを証明するのは，少し面倒である．しかし，ラグランジュ関数 L がローレンツ変換不変であることと，運動方程式 (7.48) を用いると (7.74) を満たす $\varphi^{\lambda\mu,\nu}$ は常に存在することがベリファントによって証明されている．その証明には，ローレンツ変換による ϕ_r の変換性を与え，それを表すスピン行列が必要であるので，詳細は省略し結果を記しておく．無限小ローレンツ変換 (7.34) の下で ϕ_r の変換は次のように表すことができる．

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_r{}^t\phi_t(x). \tag{7.75}$$

ここに $S^{\mu\nu}$ は μ, ν につき反対称で，ϕ_r の成分を変換する行列であり，μ-ν 平面の回転（0-ν 平面の場合はローレンツ変換）によって ϕ_r のベクトルの成分を組み替える行列で，r, t がその要素を表す．$S^{\mu\nu}$ の具体的表式は次のようなものである．ϕ_r がスカラー場のとき，時空成分はないので，ϕ_r は不変であり $\delta\phi_r=0$．よって $S^{\mu\nu}$ は0．ϕ_r がベクトル場 ϕ_μ のときは，共変ベクトルの変換

を与える．すなわち

$$(S^{\mu\nu})_\lambda{}^\rho = -(S^{\nu\mu})_\lambda{}^\rho = \delta^\mu_\lambda \eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\lambda \eta^{\mu\rho} \tag{7.76}$$

である．これにより

$$\delta\phi_\lambda = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})_\lambda{}^\rho \phi_\rho = \frac{1}{2}(\omega_{\lambda\nu}\phi^\nu - \omega_{\mu\lambda}\phi^\mu) = \omega_\lambda{}^\mu \phi_\mu \tag{7.77}$$

となる．これは（7.34）の x^μ の変換に対応する共変ベクトルの変換である．ϕ_r がテンソル場のとき，$S^{\mu\nu}$ は（7.76）の２つの直積で表される*⁾．

このＳ $S^{\mu\nu}$ を用いて，（7.74）の解 $\varphi^{\lambda\mu,\nu}$ は次のようになることがわかっている．

$$\varphi^{\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}\left[-(S^{\lambda\mu})_r{}^t\phi_t \frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\nu}} + (S^{\nu\lambda})_r{}^t\phi_t \frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\mu}} + (S^{\mu\nu})_r{}^t\phi_t \frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\lambda}}\right]. \tag{7.78}$$

この $\varphi^{\lambda\mu,\nu}$ は確かに μ と λ について反対称である．

こうして，$T^{\mu\nu}$ は必ず対称化しうることが示せたことになる．

7-6　電磁場のエネルギー・運動量テンソル

前節で述べたエネルギー・運動量テンソルの一般論を，電磁場に適用してみよう．簡単化のため，まず荷電粒子のない，電磁場のみの系をとる．（7.6）のラグランジュ関数

$$L_f = -\frac{c^2\varepsilon_0}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

に（7.59）を適用し，$T_f{}^{\mu\nu}$ を求めよう．$\phi_r = A_\mu$ とし，（7.52）を使うと

$$T_f{}^\mu{}_\nu = \frac{c^2\varepsilon_0}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu - c^2\varepsilon_0 F^{\mu\lambda}A_{\lambda,\nu} \tag{7.79}$$

となる．添字 ν を上げて

---

*）（7.75）で $\phi'_r(x')$ はローレンツ変換により関数 ϕ_r の成分が変換されて ϕ'_r になり，x^μ が x'^μ になったものを表すが，x'^μ と x^μ はミンコフスキー空間の実質的位置は変らず，座標系の違いにより，その同じ点の位置を表示する数値が変っただけである．それゆえ，$\phi'_r(x')$ と $\phi'_r(x)$ とは同一空間点における ϕ_r の成分の違いだけであるからこのように表されるのである．

$$T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu} = c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - F^{\mu\lambda}A_{\lambda,\rho}\eta^{\rho\nu}\right). \tag{7.80}$$

この $T^{\mu\nu}$ の第2項は明らかに μ, ν について対称でない．対称化するには $F^{\mu\lambda}A_{\rho,\lambda}\eta^{\rho\nu}$ を加えればよい．この付加項は $\partial_\rho\varphi^{\mu\nu,\rho}$ の形をしていることを示す．

$$F^{\mu\lambda}A_{\rho,\lambda}\eta^{\rho\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(F^{\mu\lambda}A_\rho\eta^{\rho\nu}) - \frac{\partial F^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda}\eta^{\rho\nu}A_\rho.$$

右辺の第2項目はマクスウェル方程式（j^μ のない場合）により0である．第1項の（　）の中は $F^{\mu\lambda}A^\nu = -F^{\lambda\mu}A^\nu$ であるから，$\varphi^{\lambda\mu,\nu} = -\varphi^{\mu\lambda,\nu}$ と同形であることが（7.76）と（7.78）により確められる．こうして

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu} &= c^2\varepsilon_0\left[\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\lambda}(A_{\lambda,\rho} - A_{\rho,\lambda})\eta^{\rho\nu}\right] \\ &= c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda}F_{\lambda\rho}\eta^{\rho\nu}\right).\end{aligned} \tag{7.81}$$

第2項が μ, ν につき対称であることは次のようにして容易にわかる．

$$F^{\mu\lambda}F_{\lambda\rho}\eta^{\rho\nu} = F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu = F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}F_{\rho\lambda}\eta^{\rho\mu} = F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}\eta^{\rho\mu}.$$

こうして対称化した $\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ はトレース（対角和）が0である．

$$\tilde{T}_{\mathrm{f}\mu}{}^{\mu} = \eta_{\mu\lambda}\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\mu} = 0. \tag{7.82}$$

$\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ の物理的意味を理解するため，各成分を $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いて表してみよう．

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{00} &= c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + F^{0\lambda}F_\lambda{}^0\right) \\ &= \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} + \boldsymbol{B}^2\right) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}),\end{aligned} \tag{7.83 a}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{0i} &= c^2\varepsilon_0F^{0\lambda}F_\lambda{}^i = c^2\varepsilon_0F_{0j}F^{ji} \\ &= c\varepsilon_0\epsilon^{ijk}E_jB_k = c(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})^i = \frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^i,\end{aligned} \tag{7.83 b}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{ij} &= c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{4}\eta^{ij}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} + F^{i\lambda}F_\lambda{}^j\right) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{ij}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + c^2\varepsilon_0\boldsymbol{B}^2) - (\varepsilon_0E_iE_j - c^2\varepsilon_0B_iB_j) \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{ij}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) - (E_iD_j - B_iH_j).\end{aligned} \tag{7.83 c}$$

上式の導出には（6.26），（6.29）を用いた．

(7.83 a, b) の $\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{0\mu}$ を空間積分すれば，(7.66) により 4 元運動量 $P_{\mathrm{f}}{}^{\mu}$ であるから，$\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{00}$ はエネルギー密度であり，$\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{0i}$ は運動量密度である．そして $c\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{0i}$ は単位時間に x^i 方向に流れる運動量密度を表すポインティングベクトル

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{7.84}$$

である．$\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{ij}$ はマクスウェルの応力テンソル（ストレステンソル）と呼ばれる量で，x^j に垂直な平面 dS_j に作用する力の x^i 成分の密度である．

7-7　荷電粒子と電磁場の共存系

点電荷のエネルギー・運動量テンソルを求めよう．電磁場の場合の $T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ はテンソル密度であって，それを体積積分して系全体のエネルギー・運動量が得られるものである．これと同様に，点電荷の $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ も密度の形式で表す必要がある．そこで質点を拡がりのある連続体のように考え，その体積 0 の極限として質点を得るようにしよう．そのために，質量密度 κ を導入する．質点の固有質量 m は，その位置座標 $\boldsymbol{x}_q$ を包む領域での体積積分で与えられる．

$$m = \int \kappa dV, \tag{7.85}$$

$$\therefore\quad \kappa = m\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_q) \tag{7.86}$$

と表される．点電荷の瞬間静止系 O_0 での質量密度を κ_0，体積要素を dV_0 とすると

$$m = \int \kappa_0 dV_0 = \int \kappa dV = \int \kappa\sqrt{1-\beta^2}dV_0$$

であるから，

$$\kappa_0 = \kappa\sqrt{1-\beta^2}. \tag{7.87}$$

ところで，質点系のラグランジュ関数は $\dot{x}^\mu$ で書かれているので，場の理論のときのような方法で $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ を導くことはできない．7-5 節で行った dL の計算から得られるのは z あるいは x^0 に関する保存則（(7.25) 参照）

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu - L\right) = 0 \tag{7.88}$$

である．この（　）の中はハミルトン関数であるから，エネルギー成分 T^{00} しか得られない．その理由はこの場合 ϕ_r に対応するのが x^μ で，微分パラメー

タ x^μ に対応するのが z または x^0 しかないからである．そこで点電荷の $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ は次のようにして求める．質点系のエネルギー・運動量密度は (5.9) により，κ を用いて

$$p^\mu = \kappa U^\mu = \lambda\kappa c\beta^\mu \equiv T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu}$$

と表されるので，これを $T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu}$ とおいた．すると $\beta^0=1$ であること，(7.87) を考慮して

$$T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu} = \kappa\beta^0 U^\mu = \kappa_0 U^0 U^\mu \tag{7.89}$$

と変形できる．この $T^{0\mu}$ を拡張して

$$T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu} = \kappa_0 U^\mu U^\nu \tag{7.90}$$

と定義するのである．$T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ は明らかに対称テンソルである．

荷電粒子と電磁場が共存する系のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は，

$$T^{\mu\nu} = T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu} + T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu} \tag{7.91}$$

で与えられる（$T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ は対称化された $\tilde{T}_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ のときも～を付けるのを以後省く）．

この全エネルギー・運動量テンソル密度 $T^{\mu\nu}$ が保存則

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{7.92}$$

を満たすことを示そう．そうすれば，荷電粒子と電磁場との共存する系のエネルギー・運動量の表式とその保存則が得られる．その証明のために，質点の運動方程式を次のように書き変える．通常の方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(mU^\mu) = F^\mu$$

に代って，粒子の体積を $\varDelta V$，その静止系での量を $\varDelta V_0$ として

$$\frac{d}{d\tau}(\kappa_0 \varDelta V_0 U^\mu) = F^\mu \varDelta V_0 \tag{7.93}$$

と表そう．右辺の $F^\mu \varDelta V_0$ は瞬間静止系での体積 $\varDelta V_0$ 内の粒子の質量 $\kappa_0 \varDelta V_0$ に作用する 4 元力である．この式より

$$\frac{d}{d\tau}(\kappa_0 U^\mu)\varDelta V_0 + \kappa_0 U^\mu \frac{d\varDelta V_0}{d\tau} = F^\mu \varDelta V_0. \tag{7.94}$$

(7.94) の第 1 項は

$$\frac{d}{d\tau}(\kappa_0 U^\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\kappa_0 U^\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\kappa_0 U^\mu)\, U^\nu \tag{7.95}$$

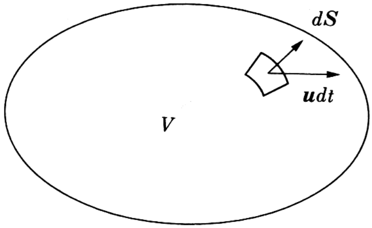


図 7.4　連続移動体の体積の変化

となる．第 2 項を変形するために，体積の変化率の表式を求めねばならない．

一般に，連続体の各点が速度 u^i で運動している場合に，体積 V の変化は

$$\frac{dV}{dt} = \int_S u^i dS_i = \int_V \frac{\partial u^i}{\partial x^i} dV \tag{7.96}$$

と表すことができる．ここで dS_i は x^i 軸方向に法線を持つ面積要素で，$dS_i = \epsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k$．右辺の第 2 等式は 3 次元ガウスの定理を用いた．(7.96) を微小体積 ΔV に適用すると

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \Delta V \tag{7.97}$$

を得る．他方，$\partial U^\nu / \partial x^\nu$ はローレンツ変換の不変式であるから，静止系に移ると

$$\frac{\partial U^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial U_0{}^\nu}{\partial x_0{}^\nu} = \frac{\partial u_0{}^\nu}{\partial x_0{}^\nu} = \frac{\partial u_0{}^i}{\partial x_0{}^i} \tag{7.98}$$

となる．静止系では $u_0{}^i = 0$ であるが，各点が速度が異なるため，この最右辺は 0 とは限らない，また $u_0{}^0 = 1$ であるので $\partial u_0{}^0 / \partial x_0{}^0 = 0$．静止系で (7.97) は (7.98) により

$$\frac{d\Delta V_0}{dt_0} = \frac{\partial u_0{}^i}{\partial x_0{}^i} \Delta V_0 = \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\nu} \Delta V_0. \tag{7.99}$$

$d\tau$ はローレンツ不変量であるから，静止系では $d\tau = dt_0$．よって上式の左辺は $d\Delta V_0 / d\tau$ としてよい．

よって，(7.95)，(7.99) を (7.94) に代入して dV_0 で割ると

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\kappa_0 U^\mu) U^\nu + \kappa^0 U^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\kappa_0 U^\mu U^\nu) = F^\mu \tag{7.100}$$

を得る．すなわち

$$\frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = F^{\mu} \tag{7.101}$$

である．

もう一方の $T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}$ について，4次元発散を計算しよう．(7.81) の対称化したものを用いて

$$\begin{aligned}\mu_0 \frac{\partial T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \eta^{\mu\nu} + F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial F^{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} F_{\lambda\rho} + \frac{\partial F^{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} F^{\nu}{}_{\lambda} + F^{\mu}{}_{\lambda} \frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x^{\nu}} \\ &= \frac{1}{2} F_{\lambda\nu}\left(\frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x_{\mu}} + 2\frac{\partial F^{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}}\right) + F^{\mu}{}_{\lambda} \mu_0 j^{\lambda}.\end{aligned} \tag{7.102}$$

最後の式ではマクスウェル方程式 (7.24) を用いた．(7.102) の括弧の中の第1と第2項が消えることを示そう．$F_{\lambda\nu}$ の反対称性を用いて変形すると，この2項は

$$F_{\lambda\nu}\left(\frac{\partial F^{\lambda\nu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F^{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x_{\lambda}}\right)$$

となる．この括弧の中は μ, λ, ν の順環和になっている．括弧の中の添字をすべて下げて（ただし，$\partial/\partial x_{\mu}$ の μ は上げて $\partial/\partial x^{\mu}$），(6.37) 式より得られる λ, μ, ν の順環和

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

と比較すれば，括弧の中の式は0であることがわかる．したがって (7.102) は

$$\frac{\partial T_{\mathrm{f}}{}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = F^{\mu}{}_{\lambda} j^{\lambda} = F^{\mu\lambda} j_{\lambda} = -F^{\mu} \tag{7.103}$$

となる．最後の式の F^{μ} は (7.17) で与えられるミンコフスキーの4元力である．

結局，(7.101) と (7.103) を合せて，保存則 (7.92) が得られる．この保存則は荷電粒子と電磁場との相互作用が互いに打消し合って全体として成立している．ここに現れる力 F^{μ} はミンコフスキー力であるが，時空間の各点では局所的に F^{μ} が作用-反作用となっていると見ることもできる．

全系のエネルギー・運動量は (7.66)，(7.83)，(7.89) より次式で与えられる．

$$P^{\mu} = \int (T_{\mathrm{f}}{}^{0\mu} + T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu})\, d\sigma_0 = P_{\mathrm{f}}{}^{\mu} + P_{\mathrm{m}}{}^{\mu},$$
$$P_{\mathrm{m}}{}^{\mu} = \int T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu} d\sigma_0 = \int \kappa\beta^0 U^{\mu} d\sigma_0 = mU^{\mu}. \tag{7.104}$$

$$P_{\mathrm{f}}{}^{0} = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\, d\sigma_0,$$
$$P_{\mathrm{f}}{}^{i} = \frac{1}{c}\int (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^i d\sigma_0. \tag{7.105}$$

$P_{\mathrm{m}}{}^{\mu}$ の κ には (7.86) を用いた．多粒子系の場合は，各粒子の $m_a U_a{}^{\mu}$ を a について和をとればよい．

$$P_{\mathrm{m}}{}^{\mu} = \sum_a p_a{}^{\mu}.$$

7-8　角運動量テンソル

角運動量は 5-6 節と 7-3 節で述べたように，座標系の回転と密接に関係している．特に作用積分がローレンツ変換で不変ならば，4 次元角運動量保存則が導ける．質点系の場合は，すでに 7-3 節でそのことを示した．場の理論ではエネルギー・運動量密度 $T^{\mu\nu}$ を空間積分して全系のエネルギー・運動量を定義したように，角運動量密度を定義することができる．そして作用積分の変分からその密度は導ける．

しかし，質点系の場合は $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ が作用積分から導けなかったように角運動量密度も導けない．そこで次のように構成する．質点系の角運動量 $\Omega^{\mu\nu}$ は (7.40) である．ここで 4 元運動量密度 p^{μ} として (7.89) を用いて

$$p^{\mu} = T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu} = T_{\mathrm{m}}{}^{\mu 0} = \kappa_0 U^0 U^{\mu} = \kappa U^{\mu}$$

とし，これを (7.40) に代入する（簡単化して 1 粒子系とする）．すると，角運動量密度として

$$M^{\mu\nu} = x^{\mu} T_{\mathrm{m}}{}^{\nu 0} - x^{\nu} T_{\mathrm{m}}{}^{\mu 0} \tag{7.106}$$

を得る．ここで $T_{\mathrm{m}}{}^{0\mu}$ を拡張して 2 階テンソル $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ としたように，(7.106) の右辺の $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu 0}$ を $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ に拡張して

$$M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda} = x^{\mu} T_{\mathrm{m}}{}^{\nu\lambda} - x^{\nu} T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\lambda} = -M_{\mathrm{m}}{}^{\nu\mu\lambda} \tag{7.107}$$

を構成しよう．$M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}$ は μ, ν につき反対称である．この $M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}$ は角運動量テ

ンソル（密度）と呼ばれている．

いま，質点系が閉じていてエネルギー・運動量が保存するとき，$M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}$ は次の保存則を満たす．

$$\frac{\partial M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda T_{\mathrm{m}}{}^{\nu\lambda} - \delta^\nu_\lambda T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\lambda} + x^\mu \frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} - x^\nu \frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda}$$

$$= T_{\mathrm{m}}{}^{\nu\mu} - T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu} - x^\mu \frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} - x^\nu \frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda}. \qquad (7.108)$$

ここで $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ が対称テンソルであるから，最初の 2 項は打消し合う．第 3，4 項は電磁場のない場合の保存則

$$\frac{\partial T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} = 0$$

によりやはり落ちる．よって

$$\frac{\partial M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} = 0 \qquad (7.109)$$

を得る．ここで留意すべきことは，(7.108) で $T_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu}$ が μ，ν につき対称テンソルであるから，(7.109) の保存則を得たということである．

質点系の角運動量 $\Omega^{\mu\nu}$ は $M^{\mu\nu0}$ 成分を空間積分すれば得られる．

$$\Omega^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu0} d\sigma_0 = \int (x^\mu \kappa_0 U^\nu - x^\nu \kappa_0 U^\mu) U^0 d\sigma_0$$

$$= \int \kappa (x^\mu U^\nu - x^\nu U^\mu) \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_q) d\sigma_0 = x_q{}^\mu p_q{}^\nu - x_q{}^\nu p_q{}^\mu. \qquad (7.110)$$

ただし，(7.87) により $\kappa_0 U^0 = \lambda \kappa_0 = \kappa$，そして (7.86) を用いた．

次に電磁場の角運動量テンソルを，作用積分がローレンツ変換の不変量であることから導こう．そのために，一般の場 ϕ_r に対する作用積分 (7.45) について角運動量テンソルを定式化しておく．無限小ローレンツ変換 (7.34) の下で，(7.45) が不変であるとする．このローレンツ変換により，場 ϕ_r ばかりでなく，積分領域 Σ も変ることも考慮すべきである．

ローレンツ変換 (7.34)

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (7.111)$$

によって引き起される ϕ_r の変化は (7.75) と同じく

$$\phi_r{}'(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \quad \delta\phi_r(x) = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})_r{}^t \phi_t(x) \qquad (7.112)$$

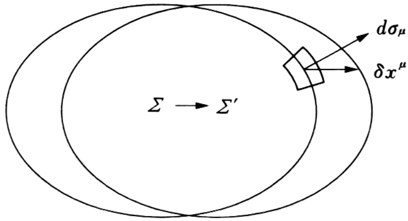


図 7.5　無限小ローレンツ変換による積分領域の変化

である．そして，積分領域も

$$\Sigma' = \Sigma + \delta\Sigma$$

と変るとしよう．すると $\delta\Sigma$ は

$$\delta\Sigma = \int_\sigma \delta x^\mu d\sigma_\mu \tag{7.113}$$

と表される．なぜならば，$d\sigma_\mu$ は 4 次元体積 Σ を囲む超曲面 σ の面積要素（3 次元）で σ に立てた法線ベクトルであるから，表皮 $\delta\Sigma$ は (7.113) で与えられる．

すると，作用積分の変化は

$$\delta S_{\rm f} = \int_{\Sigma'} L(\phi'_r(x), \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' - \int_\Sigma L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x))\, d\Sigma \tag{7.114}$$

となる．この変分を次のように 2 つに分ける．

$$\delta S_{\rm f} = \int_{\delta\Sigma} L(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' + \int_\Sigma L(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' - \int_\Sigma L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x))\, d\Sigma. \tag{7.115}$$

上式で第 1 項は積分領域 Σ' と Σ の差 $\delta\Sigma$ からの寄与で

$$\begin{aligned}\int_{\delta\Sigma} L(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' &\equiv \int_{\Sigma'} L(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' \\ &\quad - \int_\Sigma L(\phi'_r(x')\, \phi'_{r,\nu}(x'))\, d\Sigma' \\ &= \int_{\partial\Sigma} L(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\nu}(x'))\, \delta x^\mu d\sigma_\mu \end{aligned} \tag{7.116}$$

である．(7.116) で δx^μ は無限小量であるから，1 次の無限小近似では δx^μ の

係数 L の中の $\phi'_r(x')$ は $\phi_r(x)$ としてよい．よって

$$\delta S_{\mathrm{f}} \text{ の第 1 項} = \int_{\partial\Sigma} L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x))\,\delta x^\mu d\sigma_\mu$$

$$= \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu}[L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x))\,\delta x^\mu]d\Sigma. \tag{7.117}$$

最後の等式は (7.22) と同様 4 次元ガウスの定理を用いた．

δS_{f} (7.115) の第 2 項の積分領域は Σ であるから，積分パラメータ x' は x としてよい．したがって，

$$\delta S_{\mathrm{f}} = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu}[L\delta x^\mu]d\Sigma + \int_\Sigma [L(\phi'_r(x), \phi'_{r,\nu}(x)) - L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x))]d\Sigma \tag{7.118}$$

となる．上式の第 2 項は第 1 近似で

$$L(\phi'_r(x), \phi'_{r,\nu}(x)) - L(\phi_r(x), \phi_{r,\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial\phi_t(x)}\delta^*\phi_t(x) + \frac{\partial L}{\partial\phi_{t,\mu}(x)}\delta^*\phi_{t,\mu}(x) \tag{7.119}$$

と展開できる．ただし $\delta^*\phi_r$ は (7.75) とは異なる次の変分を表す．

$$\delta^*\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x) = \phi'_r(x') - \phi_r(x) - [\phi'_r(x') - \phi'_r(x)]$$

$$= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi'}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \delta\phi_r(x) - \phi_{r,\mu}(x)\,\delta x^\mu. \tag{7.120}$$

上式で微小量の第 1 近似をとるので δx^μ の係数の ϕ'_r を ϕ_r とした．この式に (7.111) と (7.112) を代入すると

$$\delta^*\phi_r(x) = \frac{1}{2}[(S^{\mu\nu})_r{}^t\phi_t(x) - \phi_{r,\lambda}(x)(\eta^{\lambda\mu}x^\nu - \eta^{\lambda\nu}x^\mu)]\omega_{\mu\nu} \tag{7.121}$$

となる．ここで注意すべきことは，(7.120) から明らかなように，$\delta^*\phi_r(x)$ は同じ座標パラメータ x^μ における ϕ'_r と ϕ_r の差であるから，x^μ による偏微分と交換可能である，すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^*\phi_r(x) = \delta^*\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x^\mu} = \delta^*\phi_{r,\mu}(x).$$

これに反し，(7.75) の $\delta\phi_r(x) = \phi'_r(x') - \phi_r(x)$ の x' と x は同一空間点ではあるが，パラメータ x^μ が異なる点での $\phi'_r(x')$ と $\phi_r(x)$ の差であるから，$\partial/\partial x^\mu$ と δ とは交換可能でない．δ^* と $\partial/\partial x^\mu$ の可換性が，以下の式の変形で必要なのである．これが δ^* 変分を導入した理由である．

そこで (7.119) の右辺第1項に運動方程式 (7.59) を用いると

$$(7.119)\quad = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{t,\mu}}\right)\delta^{*}\phi_{t} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{t,\mu}}\delta^{*}\phi_{t,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{t,\mu}}\delta^{*}\phi_{t}\right)$$

となる ($\delta^{*}\partial/\partial x^{\mu}=(\partial/\partial x^{\mu})\delta^{*}$ を用いた). よって, (7.118) にこの式を代入すると, S_{f} がローレンツ不変ならば

$$\delta S_{\mathrm{f}} = \int_{\Sigma} d\Sigma \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(L\delta x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{t,\mu}}\delta^{*}\phi_{t}\right) = 0 \tag{7.122}$$

を得る. この式で積分領域 Σ は任意であるから, 結局保存則

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(L\delta x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\delta^{*}\phi_{r}\right) = 0 \tag{7.123}$$

が導かれたことになる. ただし $\delta x^{\mu}, \delta^{*}\phi_{r}$ は (7.111) と (7.121) で与えられる. そこで

$$L\delta x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}\delta^{*}\phi_{r} = Lx^{\nu}\omega^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\lambda}}\{\phi_{r,\lambda}(\eta^{\lambda\nu}x^{\rho} - \eta^{\lambda\rho}x^{\nu}) + (S^{\rho\nu})_{r}{}^{t}\phi_{t}\}\omega_{\rho\nu}$$

の右辺を (7.61) によって $T^{\mu\nu}$ を用いて書き変えると

$$= Lx^{\nu}\omega^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\left[T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu} - 2Lx^{\nu}\eta^{\rho\mu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}(S^{\rho\nu})_{r}{}^{t}\phi_{t}\right]\omega_{\rho\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\left[T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}(S^{\rho\nu})_{r}{}^{t}\phi_{t}\right]\omega_{\rho\nu}$$

となる.

$\omega_{\rho\nu}$ は定数パラメータであるから,

$$M_{\mathrm{f}}{}^{\nu\rho\mu} \equiv \left[T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu} + \frac{\partial L}{\partial \phi_{r,\mu}}(S^{\rho\nu})_{r}{}^{t}\phi_{t}\right] = -M^{\rho\nu\mu} \tag{7.124}$$

とおくと, (7.123) の保存則は

$$\frac{\partial M_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{7.125}$$

と表される. この式は (7.109) と同形である. ただし, (7.124) は2つの部分からなっている. 第1の部分 $T^{\mu\nu}x^{\rho} - T^{\mu\rho}x^{\nu}$ は質点の軌道角運動量 $p^{\mu}x^{\nu} - p^{\nu}x^{\mu}$ に対応するものであり, 第2の部分は最後の項のスピン角運動量に対応する. $M_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\mu\nu}$ を場の角運動量テンソルという.

この $M^{\lambda\mu\nu}$ を用いて, 場の角運動量 $\Omega^{\lambda\mu}$ は

$$\Omega_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho}=\int d\sigma_0 M_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho 0}. \tag{7.126}$$

または共変形式で表すと

$$\Omega_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho}=\int d\sigma_\mu M_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho\mu}$$

となる．

ところで，(7.124) の $M^{\nu\rho\mu}$ を (7.125) によって微分を遂行すると

$$\frac{\partial M_{\mathrm{f}}{}^{\nu\rho\mu}}{\partial x^\mu}=T^{\rho\nu}-T^{\nu\rho}+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\mu}}(S^{\rho\nu})_r{}^t\phi_t\right]$$

となる．ただし，$\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu=0$ を用いた．この式が消えるにはエネルギー運動量テンソルとスピン部分が別々に 0 になる必要がある．したがって $T^{\rho\nu}=T^{\nu\rho}$ でなければならない．$T^{\mu\nu}$ の対称性は (7.108) で $M_{\mathrm{m}}{}^{\mu\nu\lambda}$ 保存則を満たすためにも必要であった．しかし，7-5, 6 節ですでに見たように，一般のラグランジュ関数から得られる $T^{\mu\nu}$ は必ずしも対称でないため，対称化の手続きが必要であった．またスピン部分もこのままでは消えないので同様のことが (7.124) の $M_{\mathrm{f}}{}^{\lambda\rho\mu}$ にも要請される．それを行うには (7.78) の $\varphi^{\lambda\mu,\nu}$ を利用し，付加項をつければよいことがわかっている．

$$\begin{aligned}\tilde{M}_{\mathrm{f}}{}^{\nu\rho\mu}&=M_{\mathrm{f}}{}^{\nu\rho\mu}+\frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\varphi^{\lambda\mu,\nu}x^\rho-\varphi^{\lambda\mu,\rho}x^\nu)\\&=M^{\nu\mu\rho}+\frac{\partial\varphi^{\lambda\mu,\nu}}{\partial x^\lambda}x^\rho-\frac{\partial\varphi^{\lambda\mu,\rho}}{\partial x^\lambda}x^\nu+\varphi^{\rho\mu,\nu}-\varphi^{\nu\mu,\rho}\\&=\tilde{T}^{\mu\nu}x^\rho-\tilde{T}^{\mu\rho}x^\nu+\frac{\partial L}{\partial\phi_{r,\mu}}(S^{\rho\nu})_r{}^t\phi_t+\varphi^{\rho\mu,\nu}-\varphi^{\nu\mu,\rho}\\&=\tilde{T}^{\mu\nu}x^\rho-\tilde{T}^{\mu\rho}x^\nu.\end{aligned} \tag{7.127}$$

こうして

$$\frac{\partial\tilde{M}_{\mathrm{f}}{}^{\nu\rho\mu}}{\partial x^\mu}=0 \tag{7.128}$$

を得る．

以上の結果を電磁場の作用積分 (7.6) に適用すると，対称化された $\tilde{T}^{\mu\nu}$ (7.81) を (7.127) に代入すれば，保存則 (7.128) を満たす角運動量テンソルが得られる．

$$\tilde{M}^{\lambda\rho\mu} = \tilde{T}^{\mu\lambda}x^{\rho} - \tilde{T}^{\mu\rho}x^{\lambda},$$
$$\tilde{T}^{\mu\lambda} = c^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\lambda}\right). \tag{7.129}$$

ラグランジュ関数あるいは作用積分には，力学系のすべての情報（初期条件のような外的情報を除き）が含まれているが，本章でみたように，いろいろな変分をとることにより，それらの情報を取り出すことができる．

7-9　微分形式によるラグランジュ方程式

7-2 節ではラグランジュ方程式を作用積分の変分から導いたが，本章を終わるにあたって微分形式を用いた導き方を示しておこう．この方法はラグランジュ方程式の別の見方でもある．作用積分の変分 (7.13)，(7.14) では δx^{μ} を独立変分とし，$\delta\dot{x}^{\mu} = d\delta x^{\mu}/dz$ は独立変分とはしなかった．しかし，$\dot{x}^{\mu}$ も独立変数とみなし，変数を倍増することにより 2 階微分方程式を 1 階微分方程式にすることもできる．

そこで，一般座標を q^r とし，

$$\xi^r = \dot{q}^r \tag{7.130}$$

とおいて，ξ^r を独立変数のように扱う．この方法は位相空間で運動量 p_r を独立変数として定式化するハミルトン形式に対応するものである（第 8 章参照）．上式を 1 形式

$$\rho^r = dq^r - \xi^r dt = 0 \tag{7.131}$$

と書き直し，ラグランジュ方程式も 1 形式によって次のように表そう．

$$\theta_r = d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^r}dt = 0. \tag{7.132}$$

こうするとラグランジュ方程式は ρ^r と θ_r によって表されることになる．

ここで 1 形式

$$\Omega = \frac{\partial L}{\partial \xi^r}dq^r - \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\xi^r - L\right)dt \tag{7.133}$$

を導入する．この Ω は，位相空間では $p_r = \partial L/\partial \xi^r$ とおくから，$\Omega = p_r dq^r - H dt$ と表される量である（8-5 節参照）．Ω は解析力学では終始重要な役をするので基本 1 形式と呼ぶことにする．

Ω の外微分をとると

$$d\Omega = d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right) \wedge dq^r - \left[d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right)\xi^r + \frac{\partial L}{\partial \xi^r}d\xi^r - \frac{\partial L}{\partial \xi^r}d\xi^r - \frac{\partial L}{\partial q^r}dq^r\right] \wedge dt$$

$$= d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right) \wedge dq^r - \left[d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right) \wedge \xi^r dt - \frac{\partial L}{\partial q^r}dq^r \wedge dt\right]$$

$$= \left[d\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^r}dt\right] \wedge (dq^r - \xi^r dt) = \theta_r \wedge \rho^r \tag{7.134}$$

を得る．上式において外微分の性質 $dq^r \wedge dt = -dt \wedge dq^r$, $dt \wedge dt = 0$ を用いた．このように $d\Omega$ は ρ^r, θ_r の外積となる．したがって，$d\Omega$ からラグランジュ方程式を導くことができるのである．

そのために，まず独立変数の微分 dq^r と $d\xi^r$ の双対ベクトル場 $\partial/\partial q^r$ および $\partial/\partial \xi^r$ と $d\Omega$ の内積をつくる．双対基底の間の内積は (4.62) で与えられるから

$$\begin{aligned}
\left\langle dq^r, \frac{\partial}{\partial q^s}\right\rangle &= dq^r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = \delta^r_s, \\
\left\langle d\xi^r, \frac{\partial}{\partial \xi^s}\right\rangle &= d\xi^r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = \delta^r_s, \\
\left\langle dq^r, \frac{\partial}{\partial \xi^s}\right\rangle &= dq^r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = 0, \\
\left\langle d\xi^r, \frac{\partial}{\partial q^s}\right\rangle &= d\xi^r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{7.135}$$

および dt と $\partial/\partial q^r, \partial/\partial \xi^r$ との内積もすべて 0．そして，内積をとるとき，(4.82) で示したように，ベクトル場 $\partial/\partial q^r$ などが微分 dq^r などを 1 つ越えるごとに符号が変ることを考慮して計算する．

$$\begin{aligned}
d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) &= \theta_r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right)\cdot\rho^r - \theta_r\cdot\rho^r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right), \\
d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) &= \theta_r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right)\cdot\rho^r - \theta_r\cdot\rho^r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right).
\end{aligned} \tag{7.136}$$

ここで，(7.132) を

$$\theta_r = \frac{\partial^2 L}{\partial q^s \partial \xi^r}dq^s + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^s \partial \xi^r}d\xi^s - \frac{\partial L}{\partial q^r}dt$$

と展開すると

$$\theta_r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^s \partial \xi^r}, \quad \theta_r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^s \partial \xi^r} \tag{7.137}$$

となる．また明らかに

$$\rho^r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = \delta^r_s, \quad \rho^r\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = 0. \tag{7.138}$$

(7.137) と (7.138) を (7.136) に代入して

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^s \partial \xi^r}\rho^r - \theta_s, \tag{7.139 a}$$

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^s \partial \xi^r}\rho^r \tag{7.139 b}$$

を得る．よって

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = 0, \quad d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right) = 0 \tag{7.140}$$

がラグランジュ方程式と同等である．厳密にいうと (7.139 b) で $\partial^2 L/\partial\xi^r\partial\xi^s$ が特異でない（行列式が 0 でない）場合に，その逆行列が存在するので，$\rho=0$ を得る．特異行列の場合は拘束条件が現れ，詳しい考察が必要である．実際に，(7.3) の L_{m} や (7.6) の L_{f} はこの行列が特異なのである．詳細は第 8 章にまわす．

ちなみに，場の理論では独立変数は各 x^i ごとに $\phi_r(x)$ と $\xi_r(x)=\partial\phi_r/\partial x^0$ であるから，q^r と ξ^r の r についての和は r の和と空間積分となる．すなわち

$$\Omega = \int\left[\frac{\partial L}{\partial \xi_r}d\phi_r - \left(\frac{\partial L}{\partial \xi_r}\xi_r - L\right)dx^0\right]d\sigma_0 \tag{7.141}$$

となる．また双対基底間の内積は

$$\left\langle d\phi_r(x), \frac{\partial}{\partial \phi_s(x')}\right\rangle_{x^0=x'^0} = d\phi_r(x)\left(\frac{\partial}{\partial \phi_s(x')}\right)_{x^0=x'^0} = \delta^s_r\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{7.142}$$

$d\xi_r$ についても同様になる．また $d\phi_r$ と $\partial/\partial\xi_r$ の内積はすべて 0 である．

(7.133) から (7.140) を実際に L_{m}, L_{int}, L_{f} に適用する計算は演習問題として残しておく．

8章　位相空間と正準理論

8-1　正準変数，共役運動量

前節ではラグランジュ関数を用いた理論で，力学変数は荷電粒子の座標 $x_q{}^\mu$ と場のポテンシャル $A_\mu(x)$ であって，速度変数 $\dot{x}_q{}^\mu$ と $\dot{A}_\mu(x)$ は，7-9 節を除いて独立な力学変数とはみなさなかった．したがって運動方程式（ラグランジュ方程式）は 2 階の微分方程式であった．だが，よく知られているように，$\dot{x}_q{}^\mu$ や $\dot{A}_\mu(x)$ を独立な力学変数として扱い，変数を 2 倍にすれば，運動方程式は 1 階の微分方程式となる．

しかし，力学変数を倍増して力学理論を定式化する場合，新変数として何を選ぶかは一義的には決まらない．$\dot{x}_q{}^\mu, \dot{A}_\mu(x)$ を新独立変数にとる代りに，一般運動量を用いた方が美しい正準理論が得られることは，解析力学でよく知られている．本章では，ハミルトンの正準理論に立脚して，相対論を定式化する．ただし，4 元形式を明示的に保って定式化すると，拘束条件が現われて，通常の正準理論にストレートにならない．その事情の説明を中心的に行うので，解析力学の基礎知識は前提とする．

一般座標を用いた座標変数を q^μ で表すと，それに共役な一般化運動量 p_μ は

$$p_\mu = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^\mu}, \quad \dot{q}^\mu = \frac{dq^\mu}{dz} \tag{8.1}$$

で与えられる．z は 7-1 節で導入した時間の代りをするパラメータである．q^μ は反変ベクトルの成分であるとすると，この p_μ は共変ベクトルの成分であ

る．第6章までに現われた運動量 p^μ は x^μ と同じく反変ベクトルとしたが，その理由は（5.9）の p^μ の定義から明らかなように $dx^\mu/d\tau$ が反変ベクトル，m がスカラーだからである．それに対し，(8.1) では L はスカラー，$\dot{q}^\mu$ は q^μ と同様反変ベクトルだからである．実際に，座標変換

$$q^\mu \to q'^\mu = q'^\mu(q) \tag{8.2}$$

を行うと，

$$\dot{q}'^\mu = \frac{\partial q'^\mu}{\partial q^\nu}\dot{q}^\nu \quad \text{より} \quad \frac{\partial \dot{q}'^\mu}{\partial \dot{q}^\nu} = \frac{\partial q'^\mu}{\partial q^\nu} \tag{8.3}$$

となる．L は不変ゆえ

$$L(q, \dot{q}) = L(q', \dot{q}')$$

であるから，

$$p_\mu = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^\mu} = \frac{\partial L(q', \dot{q}')}{\partial \dot{q}'^\nu}\frac{\partial \dot{q}'^\nu}{\partial \dot{q}^\mu} = p'_\nu \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\mu} \tag{8.4 a}$$

あるいは

$$p'_\mu = \frac{\partial q^\nu}{\partial q'^\mu} p_\nu \tag{8.4 b}$$

を得る．(8.4) は q_μ に共役な p_μ が共変ベクトルの変換性を有することを示す (4-1節参照)．

運動量の定義 (8.1) を (7.12) のラグランジュ関数に適用すると，荷電粒子の共役運動量 P_μ は（$x_q{}^\mu$ の下付き添字 q は省略）

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\frac{mc\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{\eta_{\lambda\rho}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\rho}} + qA_\mu(x) \\ &= -\frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\lambda\dot{x}^\lambda}} + qA_\mu(x) \end{aligned} \tag{8.5}$$

となる．(8.5) で $z = x_0$ とすると第1項の空間成分は $-mu_i/\sqrt{1-\beta^2} = mU_i = p_i$ となる．このように x^μ に共役な運動量 P_μ は荷電粒子の運動量 $-p_\mu$ と電磁場ポテンシャルとの和である．

他方，場の変数 $A_\mu(x)$ に共役な運動量 $\pi^\mu(x)$ は（7.51）の L_f を，$A_{\mu,0} \equiv \partial A_\mu/\partial x^0$ で微分して得られる（L_{int} は $A_{\mu,0}$ を含まない)．

$$\pi^{\mu}(x) = \frac{\partial L_{\mathrm{f}}}{\partial A_{\mu,0}} = -\frac{c^2\varepsilon_0}{2}F^{\lambda\rho}(\delta_{\mu\rho}\delta_{0\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{0\rho})$$
$$= c^2\varepsilon_0 F^{\mu 0} = c^2\varepsilon_0\left(\frac{\partial A^0}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_0}\right). \tag{8.6}$$

これからわかるように (6.26) によって

$$\pi^i(x) = c\varepsilon_0 E^i = -c\varepsilon_0 E_i,$$
$$\pi^0(x) = 0 \tag{8.7}$$

となる．π^0 が 0 となるのは $F^{00}=0$ のため，L_{f} の中に $A_{0,0}$ がないからである．

8-2 拘束条件

ハミルトン形式は座標変数 x^μ, A_μ とそれらに共役な運動量 P_μ, π_μ を独立な力学変数として扱い，座標変数と運動量変数とでつくる位相空間で力学理論を構成する．しかし，(8.7) でみたように，A_0 に共役な運動量 π^0 は恒等的に 0 であるから，π^0 を独立変数とするのは無理である．すると，A_μ に共役な独立運動量は 3 個の π^i のみである．独立でない運動量は，π^0 のように 0 でなくとも，p_μ の間に関係がついてその中のいくつかの運動量が従属変数となる場合もある．実際に，(8.5) の P_μ がその例である．

(8.5) の第 1 項をみると

$$\frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\lambda\dot{x}^\lambda}}\cdot\frac{mc\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}_\rho\dot{x}^\rho}} = m^2c^2\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}{\dot{x}_\lambda\dot{x}^\lambda} = m^2c^2$$

であるから

$$(P_\mu-qA_\mu)(P^\mu-qA^\mu)-m^2c^2 = 0 \tag{8.8}$$

という関係が成り立つ．この式は P_μ と A_μ の間に 1 つの関係がつき，それゆえ P_μ の中の 1 個は独立でないことを示している．

一般に，q^μ に共役な運動量 p_μ は (8.1) によって q^μ と $\dot{q}_\mu$ で表されるが，右辺の $\partial L(q,\dot{q})/\partial\dot{q}^\mu$ が $\dot{q}^\nu$ について独立でなく，$\dot{q}^\nu$ を消去したとき，p_μ の間にある関係式

$$\phi_\alpha(q,p) = 0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,n) \tag{8.9}$$

が得られる場合に，n 個の p_μ は独立変数ではない．そして (8.9) を拘束条件という．ここで強調すべきことは，ラグランジュ形式では ϕ_α は恒等的に 0，す

なわち $\phi_\alpha(q, p(q, \dot{q}))\equiv 0$ であるということである．

すると，いまの場合は

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (P_\mu - qA_\mu)(P^\mu - qA^\mu) - m^2c^2 = 0, \\ \phi_2 &= \pi^0(x) = 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

が拘束条件である．ここで注意すべきことは，$A_\mu(x)$ と $\pi^\mu(x)$ は各空間点 x^i ごとに1自由度を有する変数であるから，ϕ_2 は x^μ ごとに無限個の拘束条件を表すということである（ϕ_1 の中の x^μ はすべて x^μ_q の省略形である）．

この拘束条件 ϕ_α は外から与えた束縛条件と違い，ラグランジュ関数 L の関数形から自動的に現れるもので，その力学系の内部構造として最初から入っている条件である．この意味で，$\phi_\alpha=0$ を内的拘束条件という．では L が与えられたとき，何個の拘束条件が存在するかを知る判定条件は何か．その条件は簡単で次のようにすればよい．

いま一般にある力学系の自由度を表す座標変数を $q^r(r=1\sim N)$，そして，$\dot{q}^r=dq^r/dt$（または dq^r/dz）とし，q^r に共役運動量を p_r で表すとしよう．すると

$$p_r = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^r} \qquad (r=1\sim N) \tag{8.11}$$

さらに

$$A_{rs} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} = \frac{\partial p_r(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^s} = A_{sr} \tag{8.12}$$

を導入し，A_{rs} をヘシアン行列という．いま $N\times N$ 行列 A_{rs} の階数が N より低く，

$$\det(A_{rs}) = 0, \quad \mathrm{rank}(A_{rs}) = N-n \tag{8.13}$$

ならば，n 個の拘束条件が存在することになる．なぜならば，$\phi_\alpha(q, p)$ のように $\dot{q}$ を消去した関係式を考えるのだから，問題は p_r の中の $\dot{q}^r$ の独立性である．それゆえ (8.12) からわかるように，A_{rs} の階数が $N-n$ であることは，$p_r(q, \dot{q})$ が $\dot{q}$ の関数として独立でなく，n 個の関数関係が存在することを意味するからである．このような場合には，(8.11) を $\dot{q}^r$ について逆に解くことはできない．したがって，$\dot{q}^r$ を p_s, q^s で一義的に表すことはできず，n 個の $\dot{q}^\alpha$ は不定である．ヘシアン行列が特異（行列式が0）な L を特異ラグランジュ関

数という．

粒子系 L_m の場合にはヘシアン行列は

$$A^{(m)}_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 L_m}{\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu}=mc\frac{\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\rho\dot{x}_\rho}{(\dot{x}^\lambda\dot{x}_\lambda)^{3/2}}. \tag{8.14}$$

この $A^{(m)}_{\mu\nu}$ に $\dot{x}^\nu$ を乗じ和をとると

$$A^{(m)}_{\mu\nu}\dot{x}^\nu=0 \tag{8.15}$$

となり，$\dot{x}^\nu$ は $A^{(m)}_{\mu\nu}$ の固有値0の固有ベクトルであるから，$A^{(m)}_{\mu\nu}$ の行列式は0である．$\dot{x}^\nu$ 以外に固有値0の固有ベクトルは存在しないから，$A^{(m)}_{\mu\nu}$ の階数は3，すなわち P_μ の拘束条件は (8.10) のみであることがわかる．

同様に，電磁場の方は

$$A^{(f)}_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 L_f}{\partial A_{\mu,0}\partial A_{\nu,0}}=c^2\varepsilon_0(\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}-\delta_{\mu\nu}) \tag{8.16}$$

であり，$A^{(f)}_{\mu\nu}$ の階数はやはり3である．

このように拘束条件のある力学系の運動量は拘束条件の数だけ独立でないものがあるので，その運動量に共役な座標変数の扱いは注意を要する．拘束条件があればその力学系の自由度が減少することは明らかであるが，どれだけの自由度が凍結されて減少するかは ϕ_a のみで決まらずは簡単には決まらない面倒な問題である．それを決める一般的処法はディラックによって考案されたが，その処法をここに詳しく説明するのは本書の目的範囲を超えるので省略し，一般論は他書（参考文献[8]）に譲る．しかし，ディラックの処法の一部を使って荷電粒子と電磁場の拘束系を扱うことにする．

ラグランジュ関数が正則（ヘシアン行列が正則）な力学系では，座標変数 q^r と共役運動量

$$p_r=\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}^r} \tag{8.17}$$

の組は，その力学系の自由度と正しく対応するので，q^r と p_r とは正準共役な変数である．しかし，特異ラグランジュ関数の力学系では拘束条件のために，p_r のうちの従属な p_a と，それに共役な q^a とは力学系の物理的自由度と対応せず，したがって正準変数ではない．このような力学系の正準理論を構成するには，これら非正準変数 q^a, p_a を消去し，独立な正準変数のみで記述しなければならない．ところが，従属変数を消去する手続きは一般的には大変面倒なの

で，ディラックは巧妙な方法を開発した．

8-3 拘束系に関するディラックの方法

ディラック理論は拘束条件の中の従属変数を消却せず，最初はあたかも独立変数であるかのごとく扱い，微分やポアソン括弧の計算を済ませた後で拘束条件を課すのである．この方法の長所はいくつかあるが，まず従属変数を消去して独立変数を取り出すのが一般には簡単でなく，運動方程式や物理量などが複雑で汚くなるので，それを避けることができることである．また，拘束条件が (8.10) の ϕ_1 のような場合には，4 つの P_μ のうちどの 1 つを従属変数に選んでもよいから，最初からどれか 1 つを消去するのでなく，すべての P_μ を対等に扱い，最後に問題に適した変数を残すようにするのがよい．そうすれば，4 次元形式を保ったまま途中の計算を進めることができる．

荷電粒子と電磁場の系で，最初拘束条件を無視し，あたかもすべての x^μ, P_μ, A_μ および π^μ が独立変数のように扱い，ハミルトン密度関数を次のように定義してみよう．

$$
\begin{aligned}
H &= P_\mu \dot{x}^\mu + \pi^\mu(x) A_{\mu,0}(x) - L, \\
L &= L_\mathrm{m} + L_\mathrm{int} + L_\mathrm{f}.
\end{aligned}
\tag{8.18}
$$

粒子部分と場の部分をそれぞれ (8.5)，(7.12) および (8.7)，(7.51) を用いて計算すると

$$
\begin{aligned}
H_\mathrm{m} &= P_\mu \dot{x}^\mu - L_\mathrm{m} - L_\mathrm{int} = -mc\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} + qA_\mu \dot{x}^\mu - L_\mathrm{m} - L_\mathrm{int} \\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{8.19 a}
$$

$$
\begin{aligned}
H_\mathrm{f} &= \pi^\mu A_{\mu,0} - L_\mathrm{f} = c^2 \varepsilon_0 \left\{ F^{\mu 0}(F_{0\mu} + A_{0,\mu}) + \frac{1}{2} F^{\mu 0} F_{\mu 0} + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right\} \\
&= -\frac{1}{2c^2 \varepsilon_0} \pi^i \pi_i + \pi^i A_{0,i} + \frac{c^2 \varepsilon_0}{4} F^{ij} F_{ij} + A_{0,0} \pi^0
\end{aligned}
\tag{8.19 b}
$$

となる．ただし $\pi_i = -\pi^i$ であり，最後の式では $(\pi^0)^2$ は 2 次の 0 なので結果に効かないから落した（拘束条件の 2 次以上はいつでも 0 としてよい）．このようにして求めた荷電粒子部分のハミルトン関数 H_m は 0 になる．

ちなみにいうと，一般に L が $\dot{q}^r$ の斉 1 次形ならば，ハミルトン関数 H は常

に 0 となる．なぜならば，$f(y)$ が y^r の n 次の同次式（$y'^r=ay^r$ としたとき，$f(y')=a^n f(y)$ を満たす関数）ならば

$$\frac{\partial f}{\partial y^r}y^r-f=(n-1)f$$

である．上式で y^r を $\dot{q}^r$，f を L とすれば，左辺は H の定義である．L が (7.12) のように $\dot{x}^\mu$ の斉 1 次式ならば H は 0 である．

H_{m} が 0 になったのは，4 つの $\dot{x}^\mu, P_\mu$ を独立として H_{m} の定義に加えたからである．拘束条件 ϕ_1 を考慮して，たとえば，P_0 を従属変数に選び，H_{m} の定義から除けば $-P_0\dot{x}^0$ が残り 0 ではなくなる．しかし，さきに指摘したように (8.5) の 4 式は独立ではないから $\dot{x}^\mu$ について解けない．いまの場合 $P_i(i=1,2,3)$ を $\dot{x}^i$ について解けば，$\dot{x}^i$ は P_i，$\dot{x}^0$ および A_i で表される．そして $\dot{x}^0$ は不定のままであるから，$P_0\dot{x}^0$ は定まらない．そこで，粒子部分のハミルトン関数として，(8.19 a) に $\lambda\phi_1$ を加えたものを用いようというのである．λ は不定の未定係数で $\dot{x}^0$ の不定性を反映している．この方法の妥当性は次のようにして確かめられる．

拘束条件のある力学系の正準方程式を位相空間の変分原理によって導いてみよう．作用積分として

$$S=\int_{t_1}^{t_2}[p_r\dot{q}^r-H(q,p)]dt \tag{8.20}$$

を使うことにする．右辺の［　］の中は，(8.19) と同様にすべての q^r, p_r を独立変数とした場合の H の定義式から得た L である．(8.20) に最小作用の原理（t_1, t_2 で変分は 0；$\delta q^r(t_1)=\delta q^r(t_2)=0$ とする）を適用すると

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\dot{q}^r-\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\delta p_r-\left(\dot{p}_r+\frac{\partial H}{\partial q^r}\right)\delta q^r\right]dt=0. \tag{8.21}$$

ただし，$p_r\delta\dot{q}^r$ を部分積分して $\dot{q}^r\delta p_r$ とした．しかし，拘束条件 $\phi_\alpha(q,p)=0$ がある場合には，$\delta q^r, \delta p_r$ は独立の変分とはみなされないので，それらの係数を直ちに 0 とおいて運動方程式を得ることはできない．そこで，ラグランジュの未定係数法を用いて

$$\delta\phi_\alpha=\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q_r}\delta q^r+\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial p_r}\delta p_r=0 \qquad (\alpha=1\sim n) \tag{8.22}$$

に未定係数 λ^α を乗じたものを (8.21) から引いた式で，δq^r，δp_r の係数を 0 と

すればよい．

$$\delta S = \int\left[\left\{\dot{q}^r - \left(\frac{\partial H}{\partial p_r} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_r}\right)\right\}\delta p_r - \left\{\dot{p}_r + \left(\frac{\partial H}{\partial q^r} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^r}\right)\right\}\delta q^r\right]dt = 0$$

より，運動方程式

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r} + \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r} - \lambda^\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^r} \tag{8.23}$$

を得る．この方程式はハミルトン関数として

$$H_{\mathrm{T}} = H + \lambda^\alpha \phi_\alpha \tag{8.24}$$

を用い，最後に $\phi_\alpha = 0$ としたものと同じである．この H_{T} を全ハミルトン関数といい，拘束系に適用できる．(8.24) で H の中に ϕ_α が含まれている場合には，それを抜き出して $\lambda^\alpha \phi_\alpha$ の中に含ませることができる．λ^α は未定であるから，そうした後で ϕ_α の係数を改めて λ^α とすればよいからである．したがって (8.24) の H で $\phi_\alpha = 0$ としてもよい．そこで

$$H|_{\phi_\alpha = 0} \equiv H_0 \tag{8.25}$$

とおき，この H_0 を正準ハミルトン関数と呼ぶことにする．すると全ハミルトン関数は

$$H_{\mathrm{T}} = H_0 + \lambda^\alpha \phi_\alpha \tag{8.26}$$

と表すことができる．

この形式を (8.18)，(8.19) に適用すると

$$H_{\mathrm{mT}} = \lambda^1 \phi_1 = \lambda^1[(P_\mu - qA_\mu)(P^\mu - qA^\mu) - m^2c^2], \tag{8.27 a}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{fT}} &= H_{\mathrm{f}}|_{\phi_2 = 0} + \lambda^2 \phi_2 \\ &= -\frac{1}{2c^2\varepsilon_0}\pi^i \pi_i + \pi^i A_{0,i} + \frac{c^2\varepsilon_0}{4}F^{ij}F_{ij} + \lambda^2 \pi^0, \end{aligned} \tag{8.27 b}$$

$$H_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{mT}} + H_{\mathrm{fT}} \tag{8.27 c}$$

となる．この H_{T} が運動を生成するハミルトン関数である．

ところで，荷電粒子の P_μ について拘束条件がでたのは，パラメータ z を導入して4次元形式で記述したからである（電磁場の方は常に $\pi^0 = 0$ は現れる）．(8.10) は $p_\mu = P_\mu - qA_\mu$ の関係式であり．p_0 はもともと独立ではなかったものを4次元形式を保つために独立変数として導入したから，拘束条件がでたのである．それゆえ，z を最初から $x^0 = ct$ とおいた (7.2) の L_{m} を用いれば，力学変数は x^i と p_i のみになり，拘束条件は現れない．ちなみに後者の場

合のハミルトン関数と正準運動方程式を導き，両方の方式を比較してみよう．

電磁場ポテンシャルのない通常の質点系を扱うことにする．それは話を簡単化するためで本質には関係ない．(7.2) の

$$L_{\mathrm{m}} = -mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2} \qquad \left(\beta^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\dot{x}^i}{c}\right)$$

より，x^i に正準共役な p_i は

$$p_i = \frac{\partial L_{\mathrm{m}}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mc\beta^i}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} \qquad \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}\right). \tag{8.28}$$

この $\dot{x}^i$ は z での微分でなく時間 t での微分であることに注意する．正準ハミルトン関数は

$$H = p_i\dot{x}^i - L_{\mathrm{m}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}} = c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}. \tag{8.29}$$

最後の式は (8.28) を β^i について解いて得られる

$$\boldsymbol{\beta}^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}$$

を用いた．(8.29) の H はまさにエネルギーの表式に他ならない．この H より正準運動方程は

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{cp_i}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = 0, \tag{8.30}$$

となる．

他方，(8.27 a) の H_{mT} で $q=0$ としたものから得られる運動方程式は

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dz} = \frac{\partial H_{\mathrm{mT}}}{\partial p_\mu} = 2\lambda^1 p^\mu, \qquad \dot{p}_\mu = 0 \tag{8.31 a}$$

および拘束条件

$$\phi_1 = p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \tag{8.31 b}$$

である．(8.31 a) の $\mu=0$ 成分をとり，(8.31 b) を用いると

$$\frac{dx^0}{dz} = 2\lambda^1 p^0 = 2\lambda^1\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}$$

を得る．ここで，$z=x^0$ とおいて時間スケールを決めると，上式は

$$2\lambda^1 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}} \tag{8.32}$$

となる．これを (8.31 a) に用いると

$$\frac{1}{c}\frac{dx^i}{dt}=\frac{p_i}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2c^2}}$$

が得られ，(8.30) と一致する．また拘束条件 (8.31 b) は (8.29) で $H=cp_0$ としたものと同等である．

このように $z=x^0$ とすると両方の結果は完全に一致する．すると，z を導入した方法は持って回った形式主義のように見えるかも知れないが，必ずしもそうではない．大切なことは時間スケールには任意性があり，$z=x^0$ とおいて λ^1 を決定したのは，その時間スケールを決めたことである．λ^1 の任意性はその時間スケール任意性の自由度を表現しているのである．

8-4　拘束系の定常条件

拘束系を扱うディラックの形式はこれで終りではなく，まだ重要なことが残っている．それは拘束条件 ϕ_α が運動方程式と整合的でないと，運動方程式が積分できない，すなわち力学系として物理的意味をなさないということである．その整合性というのは，運動方程式に従って力学変数が時間とともに変化しても，$\phi_\alpha=0$ が常に満たされているということである．これを拘束条件の定常条件という．拘束条件は力学系が $\phi_\alpha=0$ で決定される位相空間の曲面上に制限されることを課すわけであるから，その束縛曲面が時間とともに変ってしまっては整合的な力学系の記述はできない．

そこで，拘束条件が時間的に一定であることを要請しなければならない．すなわち

$$\dot{\phi}_\alpha=\{\phi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\}=\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q_r}\frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial p_r}-\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial p_r}\frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial q_r}=0 \tag{8.33}$$

を要請する．ただし，$\{\ ,\ \}$ はポアソン括弧式である．(8.33) の右辺は厳密に 0 でなくとも ϕ_α の多項式 $\mathrm{mod}(\phi_\alpha)$ つまり $\phi_\alpha=0$ とおけば 0 となるならば，もとの曲面 $\phi_\alpha=0$ にとどまるから定常条件を満たす．このように $\mathrm{mod}(\phi_\alpha)$ で成り立つ等式を弱等式，厳密に成り立つ等式を強等式という．弱等式は記号 $\approx$ で表す．すると (8.33) の代りに

$$\dot{\phi}_\alpha=\{\phi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\}\approx 0 \tag{8.34}$$

であればよい．この弱等式は，ポアソン括弧を計算した後で $\phi_\alpha=0$ とおくことを意味する．

ところが，力学系によっては (8.34) が満たされるとは限らない．むしろ満たされない方が一般的である．その場合は $\{\phi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\}$ を改めて 0 とおき拘束条件を増すのである．すなわち

$$\chi_\alpha \equiv \{\phi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0 \tag{8.35}$$

を要請する．この χ_α を 2 次拘束条件といい，最初の ϕ_α を 1 次拘束条件と呼ぶ．すると，また χ_α も定常条件を満たす必要があるから

$$\dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H_{\mathrm{T}}\} \approx 0 \tag{8.36}$$

でなければならない．(8.36) は $\phi_\alpha=0, \chi_\alpha=0$ で成立すればよいが，もしこれが満たされなければ，さらに新たに 3 次拘束条件を追加してゆく．この手続きを繰り返し，これ以上新たな拘束条件の必要がなくなるまで続けるのである．多くの実例では 2 段目の χ_α で終る．いずれにせよ，1 次拘束条件はラグランジュ関数の性質のみで決まるのに対して，2 次以後の拘束条件は運動方程式を用いて導かれるものである．以上がディラックの方法の入門的概略である．

この定常条件を電荷のない質点系で求めてみよう．

$$\begin{aligned} \phi_1 &= P_\mu P^\mu - m^2c^2 = 0, \\ H_{\mathrm{mT}} &= \lambda\phi_1 \end{aligned} \tag{8.37}$$

である．この場合は簡単で

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_{\mathrm{mT}}\} = \{\phi_1, \lambda\phi_1\} = \{\phi_1, \lambda\}\phi_1 \approx 0 \tag{8.38}$$

となり，これ以上拘束条件は現れない．つまり，$\phi_1=0$ は運動方程式と整合的である．

次に電磁場のみ（荷電粒子のない）の場合は，運動を生成するのは (8.27 b) のハミルトン密度関数を空間積分したハミルトン関数

$$\mathcal{H}_{\mathrm{fT}} = \int H_{\mathrm{fT}} d\sigma_0 = \int\left[-\frac{1}{2c^2\varepsilon_0}\pi^i\pi_i - \frac{\partial\pi^i}{\partial x^i}A_0 + \frac{c^2\varepsilon_0}{4}F_{ij}F^{ij} + \lambda\pi^0\right]d\sigma_0 \tag{8.39}$$

である．ただし，上式の［ ］の中の第 2 項は $\pi^i A_{0,i}=\pi^i\partial A_0/\partial x^i$ を部分積分して x^i 微分を A_0 から π^i に移し，3 次元ガウスの定理によって表面積分を落した．その理由は ϕ_2 とのポアソン括弧を計算し易くするためである．

1次拘束条件

$$\phi_2 = \pi^0(x) \tag{8.40}$$

の定常条件はこの $\mathcal{H}_{\mathrm{fT}}$ によって与えられる．そのポアソン括弧を計算するには，場の変数に関する汎関数微分の表式が必要である．

いま，$A_\mu(x)$ と $\pi^\mu(x)$ の汎関数

$$F(A,\pi) \equiv \int_\sigma d\sigma_0 f(A(x),\pi(x))$$

をとり，$F(A,\pi)$ を $A_\mu(z)$ または $\pi^\mu(z)$ で微分することを考えよう．f の積分領域 σ の内に点 z^i が含まれるとき，z^i を囲む微小領域でのみ $A_\nu(x)$ を微小変化させる．$A_\nu(x) \to A_\nu(x) + \delta A_\nu(z,x^0)$ によって引き起される F の変化は

$$\begin{aligned}\delta F(A,\pi) &= \int_\sigma d\sigma_0[f(A(x)+\delta A(\boldsymbol{z},x^0),\pi(x))-f(A(x),\pi(x))]\\ &= \int_\sigma d\sigma_0 \frac{\partial f}{\partial A}\delta A(\boldsymbol{z},x^0)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) = \frac{\partial f(A(\boldsymbol{z},x^0),\pi(\boldsymbol{z},x^0))}{\partial A_\nu(z)}\delta A_\nu(z)\end{aligned}$$

となる．このような $A(z)$ の無限小変分に対する F の変化率

$$\left.\frac{\delta F}{\delta A_\nu(z)}\right|_{z^0=x^0} = \left.\frac{\partial f(A(z),\pi(z))}{\partial A_\nu(z)}\right|_{z^0=x^0}$$

を $A_\nu(z)$ による F の汎関数微分という．$\pi^\nu(z)$ による微分も同様に

$$\left.\frac{\delta F}{\partial \pi^\nu(z)}\right|_{z^0=x^0} = \left.\frac{\partial f(A(z),\pi(z))}{\partial \pi^\nu(z)}\right|_{z^0=x^0}$$

と定義される．

この汎関数微分を用いて，場の量のポアソン括弧は

$$\begin{aligned}&\{F(x^0), G(x^0)\}\\ &\quad = \int_\sigma d\sigma_0(z)\left.\left(\frac{\delta F(x^0)}{\delta A_\mu(z)}\frac{\delta G(x^0)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x^0)}{\delta \pi^\mu(z)}\frac{\delta G(x^0)}{\delta A_\mu(z)}\right)\right|_{z^0=x^0}\end{aligned}$$

によって与えられる．z^i 積分は，力学系の自由度は各空間点 z^i ごとに $A_\mu(z)$ が独立自由度を有するからである．この定義式を $A_\mu(x), \pi^\mu(x)$ の正準ポアソン括弧に適用する．まず

$$A_\mu(x) = \int_\sigma d\sigma_0(z)\,A_\mu(\boldsymbol{z},x^0)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})$$

$$\pi^\mu(x) = \int_\sigma d\sigma_0(z)\,\pi^\mu(\boldsymbol{z},x^0)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})$$

と表されるから

$$\left.\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\nu(z)}\right|_{x^0=z^0} = \delta_\mu^\nu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}), \quad \left.\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \pi^\nu(z)}\right|_{x^0=z^0} = 0,$$

$$\left.\frac{\delta \pi^\mu(x)}{\delta \pi^\nu(z)}\right|_{x^0=z^0} = \delta_\nu^\mu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}), \quad \left.\frac{\delta \pi^\mu(x)}{\delta A_\nu(z)}\right|_{x^0=z^0} = 0$$

となる．よって

$$\{A_\mu(x), A_\nu(x')\}_{x^0=x'^0} = 0, \quad \{A_\mu(x), \pi^\nu(x')\}_{x^0=x'^0} = \delta_\mu^\nu \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$\{\pi^\mu(x), \pi^\nu(x')\}_{x^0=x'^0} = 0$$

を得る．これで準備ができたので，これらの式を用いて場の理論における拘束条件の定常条件を導こう．

$\mathscr{H}_{\mathrm{fT}}$ は保存量であるから，任意の時刻で同一の表式が使えるので，$\mathscr{H}_{\mathrm{fT}}$ との汎関数微分では同時刻の条件を明示しなくともよい．よって

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^2 &= \{\phi_2(x), \mathscr{H}_{\mathrm{fT}}\} = -\int d\sigma'_0 \left\{\pi^0(x), \frac{\partial \pi^i(x')}{\partial x'^i} A_0(x')\right\} \\ &= \int d\sigma'_0 \frac{\partial \pi^i(x')}{\partial x'^i} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{\partial \pi^i(x)}{\partial x^i} \equiv \chi_2(x)\end{aligned} \tag{8.41}$$

を得る．このように 2 次拘束 χ_2 が現れる．さらに χ_2 の定常条件は

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_2 &= \{\chi_2, \mathscr{H}_{\mathrm{fT}}\} = \int d\sigma'_0 \left\{\frac{\partial \pi^i(x)}{\partial x^i}, \frac{c^2\varepsilon_0}{4} F_{jk}(x') F^{jk}(x')\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\int d\sigma'_0 c^2 \varepsilon_0 F^{jk}(x') \frac{\partial}{\partial x'^j}\{\pi^i(x), A_k(x')\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i}\int d\sigma'_0 c^2\varepsilon_0 F^{jk}(x')\delta_k^i \frac{\partial}{\partial x'^j}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = c^2\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}F^{ij} = 0.\end{aligned} \tag{8.42}$$

最後は F^{ij} の反対称性により 0 となる．したがって，これ以上高次の拘束は現れない．

2 次拘束条件は (8.7) によって

$$\chi_2 = c\varepsilon_0 \frac{\partial E^i}{\partial x^i} = c^2\varepsilon_0 \frac{\partial F^{i0}}{\partial x^i} = c^2\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0}\right) = 0 \tag{8.43}$$

と表されるから，χ_2 は電荷がないときのマクスウェル方程式の中のクーロンの法則に他ならない（(6.27 a) 参照)．このように電磁場の運動方程式の中に 2 次拘束が入っていることがある．

通常の力学系の運動方程式は時間に関する2階微分方程式であるが，運動方程式の中に上記のクーロン法則 (8.43) のように時間の1階微分方程式が入っていることがある．このような時間の1階微分方程式は拘束条件なのである．事実このような時間の1階微分方程式は座標変数とその共役運動量で表され，拘束条件となる．特異ラグランジュ関数の力学系で2次拘束条件が現れる場合，それは運動方程式の中に含まれる．上記の χ_2 のように2次拘束がそのまま生の形で含まれなくとも，運動方程式の1次結合で導かれる場合もある．そのことはラグランジュ方程式で時間の2階微分の係数がヘシアン行列 A_{rs} であり，それが特異行列であるから，A_{rs} の0固有値ベクトル τ^r が存在することからいえる．$L(q, \dot{q})$ から得られるラグランジュ方程式は

$$A_{rs}\ddot{q}_s+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^r\partial q^s}\dot{q}^s-\frac{\partial L}{\partial q^r}=0$$

と表される．これに τ^r を乗じて和をとれば $\ddot{q}^s$ を含まない方程式

$$\tau^\nu\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^r\partial q^s}\dot{q}^s-\frac{\partial L}{\partial q^r}\right)=0$$

が得られる．これは拘束条件である．1次拘束条件はヘシアン行列の階数のみで決まり，運動方程式と直接関係はない．

これで拘束条件の定常性の話は終るが，この例では全ハミルトン密度関数 H_{mT} と H_{fT} の中の未定係数 λ^a は決まらずに残ったから，ハミルトン関数は不定の任意関数を含むことになる．すると，ハミルトン方程式には任意関数 λ^a があるので，その方程式を解いても力学変数は決まらないことになる．実際に H_{mT} の質点系では (8.31 a) のように $\dot{x}^\mu$ の式に λ^1 があり，$\dot{x}^\mu$ のうちの1つは不定である．それら4式から λ^1 を消去すれば $\dot{x}^\mu$ のうち3つは定まる．また，H_{fT} の系では，A_0 に対するハミルトン方程式が不定となる．

$$\frac{\partial A_0}{\partial x^0}=\frac{\partial H_{\mathrm{fT}}}{\partial \pi^0}=\lambda^2$$

これらの不定性は実はゲージ変換と関係しているのである．拘束条件 ϕ_α, χ_α,…が互いにポアソン括弧に対し弱等式で0の場合，すなわち，どの拘束条件をとっても

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}\approx 0,\quad \{\phi_\alpha, \chi_\alpha\}\approx 0,\quad \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}\approx 0 \tag{8.44}$$

を満たすとき，これら拘束条件を第1類拘束条件という．拘束条件が第1類し

かないとき，$H_T = H_0 + \lambda^a \phi_a$ の λ^a は $\phi_\lambda, \chi_a, \cdots$ の定常条件からは決まらない．なぜならば，定常条件 (8.34)，(8.36) において，(8.44) のために λ^a 項は落ちてしまうからである．このように第1類拘束条件のみ現れる力学系は任意関数が残るから第1類拘束条件はゲージ変換の自由度に対応していることが一般的に証明される（証明略，参考文献 [8]）．

ゲージ変換というのは任意関数を含む変換を力学変数にほどこすことをいい，その変換で作用積分，あるいは運動方程式が不変な理論をゲージ理論という．

さきの例では，H_{mT} の系は唯一 ϕ_1 しかないので，$\{\phi_1, \phi_1\} = 0$ ゆえ，第1類である．H_{fT} の系では

$$\phi_2 = \pi^0, \quad \chi_2 = \frac{\partial \pi^i}{\partial x^i}, \quad \{\phi_2, \chi_2\} = 0 \tag{8.45}$$

ゆえ明らかに第1類である．電磁場の理論は 6-5 節で示したようにゲージ変換 (6.67) の下で不変であった．

荷電粒子と電磁場が共存する場合の合成系の拘束条件は (8.10) の ϕ_1 と ϕ_2 である．この ϕ_1 の中には A_0 が含まれるので

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -q(P^0 - qA^0) \neq 0$$

となる．それゆえ，この場合の拘束条件は第1類ではない．弱等式で 0 とならない拘束条件を第2類という．第2類拘束条件のときはその定常条件により，H_T の中の未定係数 λ^a が決まるから，第2類拘束はゲージ変換の自由度と関係がない．第2類拘束の役割についての説明は省略する（参考文献 [8]）．

8-5 微分形式によるハミルトン方程式

ここで位相空間における微分形式を用いてハミルトンの運動方程式の新しい導き方を紹介しておこう．それは 7-9 節で紹介した形式を変換したものである．ハミルトン関数 H を q^r, p_r の関数とすると

注） 荷電粒子と電磁場の共存系がゲージ不要でなかったのは，(7.12) のラグランジュ関数を用いたからで，荷電粒子も場の量で表し，電磁場と荷電粒子場を同時に変換すれば，ゲージ不要な理論がつくれることを付言しておく．

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^r}dq^r + \frac{\partial H}{\partial p_r}dp_r \tag{8.46}$$

であるが，他方，H の定義

$$H = p_r\dot{q}^r - L(q, \dot{q}) \tag{8.47}$$

より

$$dH = \dot{q}^r dp_r + \left(p_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)d\dot{q}^r - \frac{\partial L}{\partial q^r}dq^r \tag{8.48}$$

を得る．すると (8.46), (8.48) およびラグランジュ方程式よりハミルトンの正準方程式

$$\dot{q}^r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q^r} \tag{8.49}$$

を得る．(8.49) は1形式により次のように表される．

$$\rho^r = dq^r - \frac{\partial H}{\partial p_r}dt = 0, \tag{8.50 a}$$

$$\theta_r = dp_r + \frac{\partial H}{\partial q^r}dt = 0. \tag{8.50 b}$$

この ρ^r, θ_r は7-9節で導入したラグランジュ方程式の ρ^r, θ_r に対応する．

ここで (7.133) で定義した基本1形式 Ω を位相空間で表すと

$$\Omega \equiv p_r dq^r - Hdt\,(=Ldt) \tag{8.51}$$

となる．この Ω は (8.47) に dt を乗じて得られるものである．
この外微分をとると

$$\begin{aligned} d\Omega &= dp_r \wedge dq^r - \frac{\partial H}{\partial q^r}dq^r \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_r}dp_r \wedge dt \\ &= \left(dp_r + \frac{\partial H}{\partial q^r}dt\right) \wedge \left(dq^r - \frac{\partial H}{\partial p_r}dt\right) = \theta_r \wedge \rho^r \end{aligned} \tag{8.52}$$

を得る．上式の導出で $dt \wedge dt = 0$ を用いた．このように，$d\Omega$ は運動方程式を表す1形式 ρ^r と θ_r の外積で書ける．

したがって，(8.50) のハミルトン方程式は $d\Omega$ から次のようにして求められる． 4-4節で定義した dq^r と dp_r に共役な接ベクトル場 $\partial/\partial q^r$ および $\partial/\partial p_r$ と $d\Omega$ の内積をとる．双対基底の間の内積は (7.135) に類似の式である．

$$\left\langle dp_r, \frac{\partial}{\partial p_s}\right\rangle = dp_r\left(\frac{\partial}{\partial p_s}\right) = \delta_r^s, \quad \left\langle dp_r, \frac{\partial}{\partial q^s}\right\rangle = dp_r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = 0 \text{ など．}$$

この内積の定義と（4.82）を用いて，

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_s}\right) = \theta_r\left(\frac{\partial}{\partial p_s}\right)\rho_r - \theta_r\cdot\rho_r\left(\frac{\partial}{\partial p_s}\right) = \delta_r^s\rho_r = \rho_s, \qquad (8.53\,\mathrm{a})$$

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = \theta_r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right)\rho_r - \theta_r\cdot\rho_r\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = -\theta_r\delta_r^s = -\theta_s \qquad (8.53\,\mathrm{b})$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} \rho^s &= d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial p_s}\right) = 0, \\ \theta_s &= -d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial q^s}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (8.54)$$

がハミルトン方程式である．

これを拘束条件のある相対論に適用するとき，ハミルトン関数として H_{T} を用いるべきである．粒子系の場合には，（8.27 a）の H_{mT} を用いれば，（8.31 a）の運動方程式に相当する $\rho^\mu=0, \theta_\mu=0$ を得る．

電磁場の場合は Ω として

$$\Omega_{\mathrm{f}} = \int d\sigma_0[\pi^\mu(x)\,dA_\mu(x) - H_{\mathrm{fT}}dx^0] \qquad (8.55)$$

を用いればよい．そして，双対基底の内積は

$$\left\langle dA_\mu(x), \frac{\partial}{\partial A_\nu(x')}\right\rangle\Big|_{x_0=x'_0} = dA_\mu(x)\left(\frac{\partial}{\partial A_\nu(x')}\right)\Big|_{x_0=x'_0} = \delta_\mu^\nu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

$$\left\langle d\pi^\mu(x), \frac{\partial}{\partial \pi^\nu(x')}\right\rangle\Big|_{x_0=x'_0} = d\pi^\mu(x)\left(\frac{\partial}{\partial \pi^\nu(x')}\right)\Big|_{x_0=x'_0} = \delta_\nu^\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

(8.56)

それ以外は 0 である．

8-6 変換の生成子（母関数）

この節では，ゲージ変換の生成子（母関数）は第 1 類拘束の 1 次結合によって表されることを示す．だがその前に，7-4 節でネーターの定理によって連続変換と保存量の関係を導いたが，その保存量が位相空間での正準変換の母関数になっていることを説明しておく．それによってゲージ変換の生成母関数の意味も理解し易くなると思うからである．

ネーターの定理は (7.30) の保存量を与えた．これを位相空間で表すと，$\partial L/\partial \dot{x}_a{}^{\mu}=p_{a\mu}$ (a は粒子の番号) であるから

$$W=\sum_a p_{a\mu}\delta x_a{}^{\mu}=\text{一定} \tag{8.57}$$

となる．W は微小パラメータを含む x と p の関数である．すると

$$\delta x_a{}^{\mu}=\frac{\partial W}{\partial p_{a\mu}} \tag{8.58}$$

と表すことができるから，W は変換 $\delta x_a{}^{\mu}$ の生成母関数とみなせる．実際に，運動量保存に対応する (7.32) は

$$W_1=\sum p_{a\mu}h^{\mu} \tag{8.59}$$

と書けるから (8.58) によって，$\delta x_a{}^{\mu}=h^{\mu}$ を得る．また，角運動量保存の (7.37) に対しては

$$W_2=\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sum_a(p_{a\mu}x_{a\nu}-p_{a\nu}x_{a\mu}) \tag{8.60}$$

から，

$$\frac{\partial W_2}{\partial p_{a\mu}}=\omega^{\mu\nu}x_{a\nu}=\omega^{\mu}{}_{\nu}x_a{}^{\nu}=\delta x_a{}^{\mu} \tag{8.61}$$

を得る．このことはすでに 5-6 節でも示した．

位相空間では $p_{a\mu}$ も独立変数であるから $\delta p_{a\mu}$ も母関数から導かなければならない．一般の微小正準変換

$$q^r\to q^r+\delta q^r,\qquad p_r\to p_r+\delta p_r$$

は生成母関数 $W(q,p)$ を用いて

$$\delta q^r=\frac{\partial W}{\partial p^r}=\{q^r,W\},\qquad \delta p_r=-\frac{\partial W}{\partial q^r}=\{p_r,W\} \tag{8.62}$$

によって与えられることは解析力学の正準変換理論でよく知られている．

この方法で，(8.62) を (8.59) と (8.60) の W に適用すると，まず並進移動の母関数 W_1 から

$$\delta p_{a\mu}=-\frac{\partial W_1}{\partial x_a{}^{\mu}}=0 \tag{8.63}$$

を得る．この場合，$\delta \dot{x}_a{}^{\mu}=0$ であるから，

$$\delta p_{a\mu}=\delta\left(\frac{m\dot{x}_a{}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}_b{}^{\nu}\dot{x}_{b\nu}}}\right)=0 \tag{8.64}$$

と一致する．次にローレンツ変換の母関数 W_2 からは

$$\delta p_{a\mu} = -\frac{\partial W_2}{\partial x_a{}^{\mu}} = \omega^{\mu\nu} p_{a\nu} \tag{8.65}$$

を得る．この場合は $\delta \dot{x}_a{}^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} \dot{x}_a{}^{\nu}$ ゆえ

$$\delta p_{a\mu} = m\left[\frac{\delta \dot{x}_a{}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}_b{}^{\nu}\dot{x}_{b\nu}}} - \frac{\dot{x}_a{}^{\mu}\dot{x}_{b\nu}\delta\dot{x}_b{}^{\nu}}{(\dot{x}_b{}^{\nu}\dot{x}_{b\nu})^{3/2}}\right] = \omega^{\mu\nu} p_{a\nu} \tag{8.66}$$

上式の第１項は $\omega^{\mu\nu} p_{a\nu}$ となり，第２項は $\omega^{\mu\nu}$ の反対称性により０となることが示される．

$$\dot{x}_{b\nu}\delta\dot{x}^{\nu}{}_b = \dot{x}_{b\nu}\omega^{\nu}{}_{\mu}\dot{x}_a{}^{\mu} = \omega^{\nu\mu}\dot{x}_{b\nu}\dot{x}_{b\mu} = 0$$

よって（8.64）と一致する．

このように，ネーターの定理から得られる保存量は，対応する微小変換の生成母関数であり，それから得られる変換は微小正準変換である．そして，この変換は当然ながらラグランジュ関数を不変にする．

8-7　ゲージ変換の生成母関数のつくり方

ではいよいよ，前節で導いた第１類拘束とゲージ変換の母関数との関係を求めよう．すでに指適したように，第１類拘束条件はゲージ自由度と対応しているが，それらの１次結合をつくり，それが保存するように係数を定める，すなわち，拘束条件 ϕ_α, χ_α により

$$G \equiv \varepsilon_1^{\alpha}\phi_\alpha + \varepsilon_2^{\alpha}\chi_\alpha \tag{8.67}$$

とおき，G が定常条件

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_{\mathrm{T}}\} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_0\} + \lambda^{\alpha}\{G, \phi_\alpha\} = 0 \tag{8.68}$$

を満たすように $\varepsilon_1^{\alpha}, \varepsilon_2^{\alpha}$ を決めるのである（第２次拘束がない場合は $\varepsilon_2^{\alpha}=0$ とする）．H_{T}は（8.26）で与えられる全ハミルトン関数である．（8.68）で $\varepsilon_1^{\alpha}, \varepsilon_2^{\alpha}$ が t を陽に含むので，$\partial G/\partial t$ は $\varepsilon_1^{\alpha}, \varepsilon_2^{\alpha}$ のみを微分し，ϕ_α, χ_α には作用しない．すると G は微小ゲージ変換の生成母関数であることが一般的に証明できるのであるが，その証明は長くなるので省略し，前節の第１類拘束の場合に実際にそうなっていることを示すことにする（証明と一般論は参考文献[8]参照）．

実は（8.9）のところで指摘したように，ϕ_α はラグランジュ形式においては

恒等的に 0 であるから (8.68) の右辺は $\mathrm{mod}(\phi_\alpha)$ で 0 であればよいのである．$\{G, \lambda^\alpha\}\phi_\alpha$ の項を落したのもそのためである．

H_T は (8.26) により，任意関数 λ^α を含むので，(8.68) は次の 2 つの条件に分解される．

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\{G, H_0\} \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\phi_\alpha), \tag{8.69}$$

$$\{G, \phi_\alpha\} \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\phi_\alpha). \tag{8.70}$$

この (8.69) から $\varepsilon_1^\alpha, \varepsilon_2^\alpha$ 満たすべき条件は (8.35), (8.36) を考慮すると

$$\dot{\varepsilon}_1^\alpha\phi_\alpha+\varepsilon_1^\alpha\chi_\alpha+\dot{\varepsilon}_2^\alpha\chi_\alpha+\varepsilon_2^\alpha\dot{\chi}_\alpha \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(\phi_\alpha)$$

となるが，本節の例では $\dot{\chi}_\alpha=0$ であるから

$$\varepsilon_1^\alpha+\dot{\varepsilon}_2^\alpha = 0 \tag{8.71}$$

を得る．ここに

$$\dot{\varepsilon}_2^\alpha = \frac{\partial\varepsilon_2^\alpha}{\partial t}+\{\varepsilon_2^\alpha, H_0\} \tag{8.72}$$

である．(8.71) から ε_2^α を与えれば ε_1^α が決まる．ε_2^α は (8.70) が満たされる限り任意であり，通常は時間 t の任意関数でよい（場の理論の場合は x^μ の任意関数）．

(8.69) と (8.70)，あるいは (8.70) と (8.71) を満たす G により，微小ゲージ変換は

$$\delta q^r = \{q^r, G\} = \frac{\partial G}{\partial p_r}, \quad \delta p_r = \{p_r, G\} = -\frac{\partial G}{\partial q^r} \tag{8.73}$$

で与えられるのである．すなわち G は微小ゲージ変換の生成母関数である．

実際に (8.37) の H_{mT} と ϕ_1 の例で G を求めてみよう．この場合は $H_0=0$ でしかも χ_2 がないから簡単である．G は

$$G = \varepsilon\phi_1 = \varepsilon(P_\mu P^\mu-m^2c^2) \tag{8.74}$$

となり，(8.69) と (8.70) は自働的に満たされ，ε は z の任意関数である*)（この例では t の代りに z が用いられているから）．

するとゲージ変換は（電磁場のない $q=0$の場合）

$$\delta x^\mu = \frac{\partial G}{\partial P_\mu} = 2\varepsilon(z)P^\mu = -\frac{2mc\varepsilon(z)\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}_\nu\dot{x}^\nu}} \tag{8.75}$$

---

*）より一般的には ε は z, x^μ, P_μ の任意関数でよい．

となる*). この変換 δx^μ によってラグランジュ関数の変分は次のようになる.

$$-\delta L_{\mathrm{m}} = \delta(mc\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}) = m\frac{c\dot{x}_\mu \delta\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} = P_\mu \frac{d}{dz}(2\varepsilon P^\mu)$$

$$= 2\dot{\varepsilon}P_\mu P^\mu + 2\varepsilon P_\mu \dot{P}^\mu = 2\dot{\varepsilon}P_\mu P^\mu + \varepsilon\frac{d}{dz}(P_\mu P^\mu). \tag{8.76}$$

ここで拘束条件 $\phi_1 = P_\mu P^\mu - m^2c^2 = 0$ はラグランジュ形式では恒等式であるから, $P_\mu P^\mu = m^2c^2$ を (8.76) に代入すると

$$\delta L_{\mathrm{m}} = -2m^2c^2\dot{\varepsilon}(z) \tag{8.77}$$

となる. ラグランジュ関数には全微分 df/dt の不定性があり, L と $L+df/dt$ は同一のラグランジュ方程式を与え, 力学的に同等であることはよく知られている. したがって変換 (8.75) により L_{m} は力学的に同等な $L_{\mathrm{m}}+\delta L_{\mathrm{m}}$ に移る (このようなとき L_{m} は準不変であるという). それゆえ, 任意関数 $\varepsilon(z)$ を含む変換 (8.75) はゲージ変換である.

このゲージ変換の任意性はパラメータ z を導入して時間 x^0 を独立変数として扱ったために, x^μ のうちの1つが不定になったからである. 事実 (8.31 a) で $\dot{x}_\mu$ の方程式に未定関数 λ^1 が入り, 不定となった (その代りに位相空間で拘束条件 $\phi_1=0$ が現れた). しかし, $x^0=z$ とおくと (8.32) のように λ^1 が定まり任意性が消えた. $x^0=z$ としたのは通常のラグランジュ関数 (8.28) と一致させるためであった. λ^1 は (8.32) と決める必要はなく, 任意でよい. その任意性は x^μ の任意性に反映されるが, それはゲージ変換 δx^μ に対応しているのである. λ^1 を決めるために x^μ のうちの1つを z の定った関数で固定すること ($x^0=z$ がその1例) をゲージ固定という.

最後に, 電磁場の H_{fT}, (8.40) の ϕ_2 および (8.41) の χ_2 から G を構成してみよう.

$$G = \int(\varepsilon_1\phi_2 + \varepsilon_2\chi_2)\,d\sigma_0 = \int\left(\varepsilon_1\pi^0 + \varepsilon_2\frac{\partial\pi^i}{\partial x^i}\right)d\sigma_0 \tag{8.78}$$

ε_2 が x^μ の任意関数であれば, (8.71) によって $\varepsilon_1 = -\dot{\varepsilon}_2 = \partial\varepsilon_2/\partial x^0$ も x^μ のみの関数であるから, 条件式 (8.70) が満たされることは明らかである*).

---

*) この G より得られる $\delta p_\mu = -\dfrac{\partial G}{\partial x^\mu}$ と $\bar{\delta}p_\mu(\dot{x}) = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial \dot{x}^\nu}\delta\dot{x}^\nu$ とは一致しない. G が p の2次以上の場合には δp と $\bar{\delta}p$ とは運動方程式の式の上でのみ一致することが証明できる. このずれは量子力学の径路積分に影響するが古典論で影響はない.

$$\{-\dot{\varepsilon}_2\phi_2+\varepsilon_2\chi_2,\ \phi_2\} = \varepsilon_2\{\chi_2,\ \phi_2\} = 0$$

よって，$\varepsilon_2=\varepsilon(x)$ とおいて

$$G = \int d\sigma_0\left[-\frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x^0}\pi^0+\varepsilon(x)\frac{\partial\pi^i}{\partial x^i}\right] = -\int d\sigma_0\pi^\mu(x)\frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x^\mu} \qquad (8.79)$$

を得る．上式で［　］の中の第2項の3次元発散を部分積分し，ガウスの定理により表面積分を落し，最右端の表式とした．

このGを生成母関数とする微小変換は

$$\delta A_\mu = \{A_\mu,\ G\} = -\frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x^\mu} \qquad (8.80)$$

となり，任意関数 $\varepsilon(x)$ を $\Lambda(x)$ が微小関数の場合とすれば (6.67) や (7.53) のゲージ変換と一致する．また，$\delta\pi^\mu=\{\pi^\mu,\ G\}=0$ となるが，$\delta\pi^\mu=\delta F^{\mu0}=0$ は (8.80) と整合する．よって (8.79) の G はゲージ変換の生成母関数である．

＊）より一般的には ε_2 は $\pi^\mu,\ A_i$ を含む任意関数 $\varepsilon(x,\ \pi^\mu,\ A_i)$ でもよい．

参考文献

相対性理論については

1) C.メラー著，永田恒夫，伊藤大介訳：『相対性理論』みすず書房 (1959).
2) ランダウ-リフシッツ著，恒藤敏彦，広重徹訳：『場の古典論』東京図書 (1978).
3) 中野董夫著：『相対性理論』岩波書店 (1984).

微分形式と相対性理論については

4) B. F. シュッツ著，江里口良治，二間瀬敏史訳：『相対論入門　上，下』丸善 (1988).
5) 前原昭二著：『線形代数と特殊相対論』日本評論社 (1993).

微分形式と解析力学については

6) E. カルタン著，矢野健太郎訳：『外微分形式の理論』白水社 (1964).
7) 栗田稔著：『微分形式とその応用』現代数学社 (1976).
8) 木村利栄，菅野禮司著：『(改訂増補版) 微分形式による解析力学』吉岡書店 (1996).

索　　引

あ　行

か　行

さ　行

た　行

な　行

は 行

ま 行

や 行

ら 行

著者略歴

1930 年　千葉県生まれ.
1959 年　京都大学大学院理学研究科博士課程修了. 理学博士.
　　　　湯川財団奨学研究生.
1960 年　大阪市立大学理学部物理学科助手.
1967 年　カナダの Dalbausie University に Senior Research Fellow として招かれる.
1985 年　大阪市立大学理学部教授.
1994 年　同大学定年退職. 大阪市立大学名誉教授.

主な著書

相対性理論はむずかしくない（共著, 講談社, 1972).
物理学の論理と方法　上・下（大月書店, 1983).
素粒子・クォークのはなし（新日本出版社, 1985).
東の科学・西の科学（共著, 東方出版社, 1988).
力とは何か（丸善, 1995).
微分形式による解析力学（共著, 吉岡書店, 1996).

微分形式による特殊相対論

平成 8 年 10 月 30 日　発　行

著作者　菅　野　禮　司

発行者　鈴　木　信　夫
　　　　出版事業部 深山恒雄

発行所　丸 善 株 式 会 社　東京・日本橋

出版事業部　〒113　東京都文京区本郷二丁目38番3号
編集部　電話(03)5684-5081／FAX(03)5684-2458
営業部　電話(03)5684-5571／FAX(03)5684-2456
郵便振替口座　00170-5-5

組版印刷・株式会社 精興社／製本・交通製本株式会社

ISBN 4-621-04262-9 C 3042　　Printed in Japan